Die Zeigerdarstellung von Schwingungen

Harmonische Schwingungen werden durch eine Sinusfunktion

$$y\,(t) = y_{max}\,\sin\,(\omega t - \varphi_0)$$

dargestellt.

Dabei erfasst die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ die zeitliche Periodizität: Beispielsweise führt eine Variation von t im Intervall von 0 bis T zu einer Variation des Terms ωt im Bereich von 0 bis 2π und liefert damit eine komplette Sinusperiode. Der Zeiger R in **Abbildung 1** hat dann eine komplette Drehung ausgeführt, da ωt seinen Winkel zur waagerechten Achse im Bogenmaß darstellt. Die Rotation erfolgt konventionell gegen den Uhrzeigerdrehsinn, damit die erste Halbperiode positive Werte für y liefert.

y_{max} ist die Amplitude, T die Periodendauer und φ_0 der Nullphasenwinkel, den der Zeiger für $t = 0$ mit der waagerechten Achse bildet (oft hat er den Wert 0, siehe z. B. **Abb. 1**). $y\,(t)$ ist eine zeitabhängige physikalische Größe, z. B. eine Auslenkung s, eine Spannung U, ein Druck p oder eine Feldstärke E.

Betrachtung von Phänomenen in Zeigerdarstellung

Der Zeiger R ist ein zeitabhängiger Vektor $\underline{R}\,(t)$. Für die Darstellung der Sinuskurve wird nur ein Teil der Zeigerrotation, nämlich die senkrechte Komponente (grau in **Abb. 1**) genutzt; dieser Teil reicht für Schwingungen völlig aus.

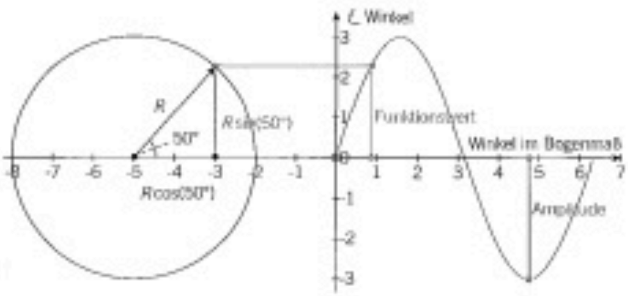

Abb. 1: So könnte die Sinusfunktion im Mathematikunterricht eingeführt worden sein

Stellt man den Zeiger nun als komplexe Zahl $z = x + iy$ dar, wird $y\,(t)$ zu einer komplexen Exponentialfunktion

$$z\,(t) = z_{max}\,e^{\,i\varphi(t)}.$$

Für den Physikunterricht ist das üblicherweise nicht erforderlich, wird aber im Zusammenhang mit Schwingungsdifferentialgleichungen für gedämpfte und erzwungene Schwingungen genutzt, die sich wegen der einfachen Ableitung von Exponentialfunktionen leichter lösen lassen.

Die quantenphysikalischen periodischen ψ-Funktionen sind stets komplexwertig. Es reicht deshalb hier nicht mehr, nur eine Komponente des Zeigers auszuwerten: Zur Ermittlung von z. B. Nachweiswahrscheinlichkeiten beim Doppelspaltversuch mit Elektronen muss deshalb die gesamte Zeigerlänge verwendet werden (genauer das Quadrat der Zeigerlänge).

Die Zeigerdarstellung im Unterricht

Es ist empfehlenswert, Schülerinnen und Schüler in der synonymen Nutzung von Zeigerdarstellung und Sinusfunktion zu trainieren. Der Graph der Sinusfunktion ordnet bei Schwingungen sehr deutlich das zeitliche Nacheinander der Werte nebeneinander an; dieses Diagramm müssen Schülerinnen und Schüler auch genau so lesen können und dürfen es nicht z. B. mit dem räumlichen Nebeneinander bei einer Welle verwechseln. Die Periodizität ergibt sich aus der ständigen Wiederholung der Sinuskurve unmittelbar. Dies wird auch in der Zeigerdarstellung deutlich, konzentriert aber den periodischen Vorgang auf einen begrenzten Bereich, macht das Wiederholen also noch deutlicher. Dies bewährt sich insbesondere, wenn man sich an einem Wellenträger die Schwingungen der einzelnen Oszillatoren räumlich nebeneinander vorstellen will: Man „sieht" dann eine ganze Folge von rotierenden Zeigern nebeneinander mit systematisch variierender Phasenlage (mit Sinuskurven wäre das wohl nur sehr mühsam darstellbar).

Auch für die Überlagerung von Schwingungen in der gleichen Ebene, wie sie bei Interferenzphänomenen auftritt, ist die Zeigerdarstellung hilfreich: Die Zeiger der einzelnen Schwingungen werden vektoriell addiert, was deutlich einfacher ist als die punktweise Ordinatenaddition bei Sinusfunktionen. Beispielsweise bei der Addition gleichfrequenter Schwingungen bei der Beugung am Gitter rotiert dann am Interferenzort ein Summenzeiger, dessen Länge sich aus den Einzelzeigern unmittelbar ergibt. Die Minima und Maxima sind so leicht zu erschließen, und die Sinusform der Summenschwingung ergibt sich nebenbei.

Erste Erfahrungen mit der Zeigerdarstellung

Wenn Sie, liebe Leserinnen und Leser, mit der Zeigerdarstellung noch nicht vertraut sind, machen wir ein Experiment: Schließen Sie die Augen und stellen Sie sich die beiden rotierenden Zeiger bei der Überlagerung von *nicht* gleichfrequenten Schwingungen, z. B. einer Schwebung mit zwei Stimmgabeln, vor. Sehen Sie, wie der eine Zeiger den anderen nach einer festen Zeit immer wieder überholt? Wenn sie sich jetzt den Summenzeiger als Diagonale im Vektorparallelogramm dazu denken, sollte sich die typische, eindrückliche Lautstärkevariation über die Länge des Summenzeigers direkt erschließen. Auch Schülerinnen und Schüler sehen das unmittelbar und haben ihre Freude an dieser Erfahrung.

Im Artikel auf S. 12–15 werden rotierende Zeiger mit dynamischer Geometriesoftware modelliert und damit auch visualisiert.