Diagramme beschreiben Bewegungen

1. Eine Trainingsfahrt im *t-s*-Diagramm

Tim ist begeisterter Radsportler. Während seiner Trainingsfahrten benutzt er einen Fahrradcomputer, an dem er zu jedem Zeitpunkt ablesen kann, welchen Weg er vom Startpunkt aus zurückgelegt hat. Hierzu misst sein Computer über Satellit in kurzen Zeitabständen den Ort, an dem sich sein Fahrrad befindet. Berechnet der Computer die Entfernung jeweils zwischen zwei gemessenen Orten und addiert die Teilwege, kann er so den gesamten zurückgelegten Weg ermitteln.

Sein Computer speichert die Messwerte in Abständen von 2 min ab. Tim kann sie abrufen und einzelne Abschnitte seiner Fahrt untersuchen. Die Werte, die Tim zu Beginn seiner Fahrt auf einer geraden Straße gespeichert hat, zeigt → T1. An einem anderen Tag hat er die Fahrt wiederholt.

Um einen besseren Überblick über die Messwerte zu bekommen, stellt Tim sie jeweils in einem Zeit-Weg-Diagramm dar → B1, kurz *t-s*-Diagramm genannt (*t* von engl.: time = „Zeit", *s* von lat.: spatium = „Weg").
Jeder Messpunkt des *t-s*-Diagramms gibt an, zu welcher Zeit sich Tim an welchem Ort befand. Der Startpunkt zur „Zeit null" lässt sich als „Kilometer null" verstehen. Der vierte Messpunkt in → B1b bedeutet, dass Tim zum Zeitpunkt 6 min am Ort 3,0 km war, denn er hatte ja zu diesem Zeitpunkt vom Start aus gemessen einen Weg von 3,0 km zurückgelegt.

2. Schnell und langsam

Tim fällt auf, dass in beiden Diagrammen die Messpunkte nahezu auf Ursprungsgeraden liegen, im oberen vom 25. Mai → B1a verläuft die *t-s*-Gerade allerdings steiler. Am letzten Messpunkt kann Tim erkennen, dass er sich bei dieser Fahrt zum Zeitpunkt 10 min am Ort 5,1 km befand. Er hatte also in den ersten 10 Minuten einen Weg von 5,1 km zurückgelegt.

Im unteren Diagramm → B1b in dem die Gerade flacher verläuft, kann er in gleicher Zeit nicht so weit gekommen sein. Tatsächlich sind es in 10 min nur 3,9 km.
Tim glaubt auch den Grund zu kennen: Er erinnert sich, dass er bei der zweiten Fahrt mit Gegenwind zu kämpfen hatte. Deshalb fuhr er langsamer und konnte so in der gleichen Zeit nur einen kürzeren Weg zurücklegen.

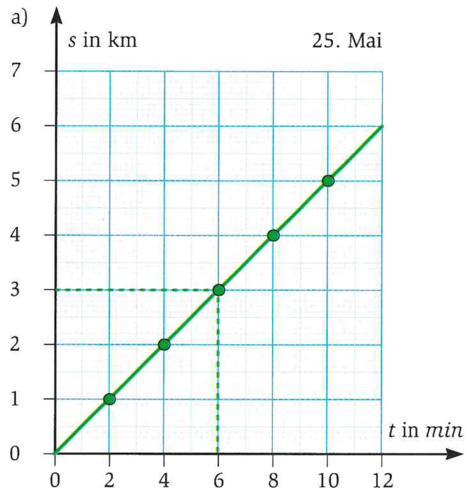
Schneller sein bedeutet also, in der gleichen Zeit den längeren Weg zurückzulegen. Im *t-s*-Diagramm erkennt man die schnellere Bewegung am steileren Anstieg des Diagramms.

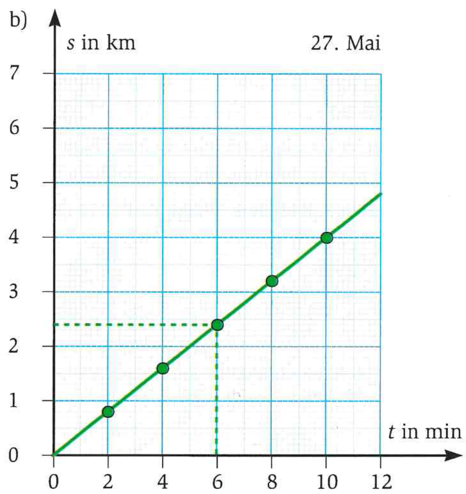
Merksatz

Im *t-s*-Diagramm bedeutet ein steilerer Anstieg des Diagramms eine schnellere, ein flacherer Anstieg des Diagramms eine langsamere Bewegung.

Trainingsfahrt vom 25. Mai						
Zeit *t* in Minuten	0	2	4	6	8	10
Weg *s* in km	0	1,0	2,1	3,0	3,9	5,1
Trainingsfahrt vom 27. Mai						
Zeit *t* in Minuten	0	2	4	6	8	10
Weg *s* in km	0	0,8	1,5	2,4	3,1	3,9

T1 Die Tabelle zeigt einige der Messwerte von Tims Radfahrten am 25. Mai und am 27. Mai.

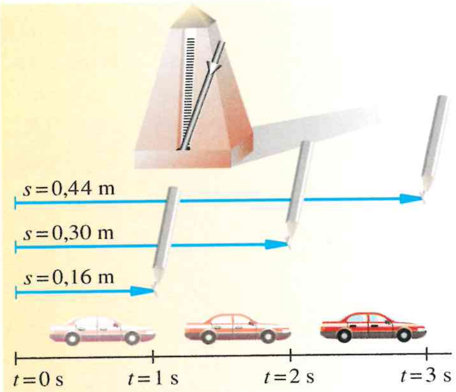




B1 Tims Trainingsfahrten, dargestellt im *t-s*-Diagramm am **a)** 25. Mai, **b)** 27. Mai. Jeder Messpunkt des Diagramms gibt an, zu welchem Zeitpunkt sich Tim an welchem Ort befand.

Die Geschwindigkeit

B1 Wer ist der Schnellere? Der Marathonläufer benötigt für 42,195 km zwei Stunden und vier Minuten, die Radfahrer schaffen ihre 18 km lange Radtour in 58 Minuten.



V1 **a)** Während ein Modellauto über einen Tisch fährt, gibt ein Metronom Taktschläge in Sekundenabständen. Zu jedem Schlag wird der jeweilige Ort des Modellautos markiert. Für die Auswertung bleiben die ersten beiden Ortsmarken in der Startphase, so lange das Auto noch schneller wird, unberücksichtigt.
b) Der Versuch wird wiederholt. Das Modellauto fährt dabei langsamer. Wieder werden die zurückgelegten Wege mithilfe der Ortsmarken bestimmt.

	Zeit t in s	0	1	2	3	4
a)	Ort s in m	0	0,16	0,30	0,44	0,61
	s/t in m/s	–	0,16	0,15	0,15	0,15
b)	Ort s in m	0	0,09	0,20	0,32	0,39
	s/t in m/s	–	0,09	0,10	0,11	0,10

T1 Messwerte zu → V1a und → V1b

1. Gleichförmige Bewegung

Wer ist in → B1 schneller, Marathonläufer oder Radfahrer? Da die unterschiedlichen Wege auch noch in verschiedenen Zeiten zurückgelegt wurden, können wir die Frage nicht sofort beantworten. Um das Problem grundsätzlich zu lösen, gehen wir ins Labor und untersuchen dort eine ähnliche Bewegung genauer.

In → V1 lassen wir ein Modellauto fahren und halten fest, an welchen Orten sich das Modellauto in Sekundenabständen befindet. Die Startphase, in der das Auto laufend schneller wird, soll hierbei unberücksichtigt bleiben. Wir legen daher erst die zweite Markierung als Ortsmarke „Null" fest und beginnen erst ab hier mit der Zeit- und Ortsmessung.

Die zweite Zeile in → T1 zeigt die Orte, an denen sich der Wagen zu den Zeitpunkten 1 s, 2 s, 3 s befand. Sie geben den von der Ortsmarke „Null" zurückgelegten Weg an. Wir sehen, dass der vom Auto zurückgelegte Weg immer um 15 cm zunimmt, wenn die Zeit um 1 s weiterschreitet. Dabei sehen wir von kleinen Messungenauigkeiten ab. Wir sagen, das Modellauto führt eine **gleichförmige Bewegung** aus.

In unserem Fall – wir starten zur Zeit 0 s am Ort 0 cm – gilt zudem: In 2 s hat sich der Weg verdoppelt, in 3 s verdreifacht. Die vom Start zurückgelegten Wege s sind den benötigten Zeiten t proportional. Das t-s-Diagramm muss daher eine Ursprungsgerade sein. Dies bestätigt die hellgrüne Gerade → B1. Außerdem müssen die Quotienten s/t konstant sein. Dies zeigt die dritte Zeile in → T1.

Merksatz

Wenn eine Bewegung folgende Merkmale zeigt, dann handelt es sich um eine gleichförmige Bewegung:
- In der doppelten (dreifachen, …) Zeit t wird der doppelte (dreifache, …) Weg s zurückgelegt.
- Das t-s-Diagramm zeigt eine Ursprungsgerade.

2. Konstante Geschwindigkeit

In → V1b fährt das Modellauto im zweiten Durchgang langsamer als im ersten. Die Bewegung ist in → B2 durch die dunkelgrüne Ursprungsgerade dargestellt. Sie verläuft weniger steil als die hellgrüne Gerade, die zu → V1a gehört.

Unterschiedlich sind auch die zu den beiden Bewegungen gehörenden Quotienten s/t in der dritten Zeile und sechsten Zeile in → T1. Bei der schnelleren Fahrt ergibt sich ein größerer Quotient als bei der langsameren. Somit ist der Quotient s/t ein Maß dafür, wie schnell das Auto fährt. Diese Erkenntnis führt zu einer sinnvollen Definition: Der konstante Quotient s/t dieser gleichförmigen Bewegung ist die **Geschwindigkeit v** (v von engl.: velocity = „Geschwindigkeit").

Merksatz

Bei einer gleichförmigen Bewegung (mit $s = 0$ m bei $t = 0$ s) nennen wir den Quotienten aus zurückgelegtem Weg s und der dazu benötigten Zeit t die Geschwindigkeit v:

$$v = \frac{s}{t}$$

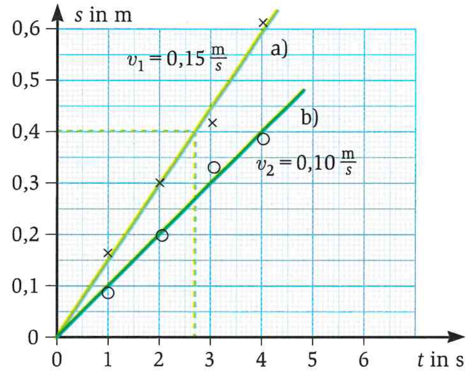
Nun können wir die in → B2 gestellte Frage beantworten: Der Marathonläufer legte 42 195 m in 124 min zurück. Gehen wir vereinfacht von einer gleichförmigen Bewegung aus, so ergibt sich $v = 42\,195\ \text{m}/(124\ \text{min}) \approx 340{,}3\ \text{m/min}$. Für den Radfahrer erhalten wir $v = 18\,000\ \text{m}/(58\ \text{min}) \approx 310{,}3\ \text{m/min}$. Der Marathonläufer ist schneller!

3. Die Geschwindigkeit hat eine Richtung

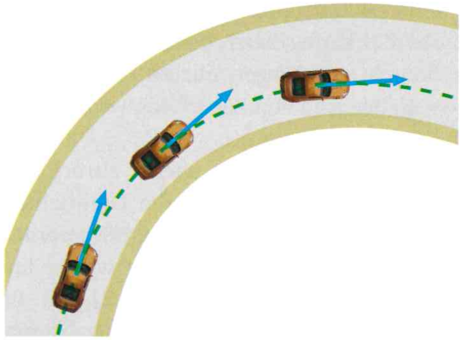
Verfolgen wir die Bewegung eines Autos während einer Kurvenfahrt → B3. Neben dem Weg, der pro Sekunde zurückgelegt wird, ist sicher auch von Bedeutung, in welche Richtung sich das Fahrzeug bewegt.
Soll die Geschwindigkeit die Bewegung des Fahrzeuges *eindeutig* beschreiben, ist es sinnvoll, der Geschwindigkeit auch eine Richtung zuzuweisen. Dies lässt sich durch einen Pfeil verdeutlichen → B4. Die Länge des Pfeils gibt vergleichsweise den Betrag $v = s/t$ der Geschwindigkeit an. Ihn können wir beispielsweise am Tachometer eines Fahrzeugs ablesen. Die Richtung des Pfeils gibt die Bewegungsrichtung und damit die Richtung der Geschwindigkeit an. Eine Größe, die neben ihrem Betrag auch eine Richtung besitzt, heißt **Vektor**. Das Symbol des Geschwindigkeitsvektors ist $\vec{v}$.

Merksatz

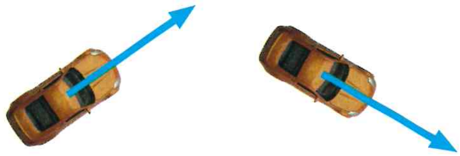
Die Geschwindigkeit ist durch Betrag und Richtung festgelegt. Man kann beides durch einen Pfeil veranschaulichen. Die Länge des Pfeils gibt den Betrag der Geschwindigkeit an. Die Richtung des Pfeils beschreibt die Bewegungsrichtung und damit die Richtung der Geschwindigkeit.



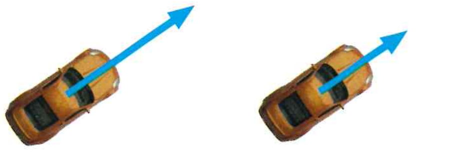
B2 Diagramm zu → V1



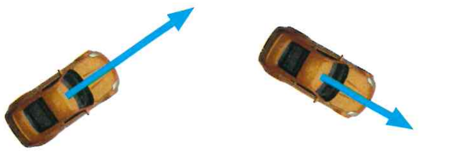
B3 Während der Kurvenfahrt ändert sich ständig die Richtung der Geschwindigkeit. Dies verdeutlicht ein Geschwindigkeitspfeil. Da der Betrag der Geschwindigkeit hier konstant ist, hat der Pfeil immer die gleiche Länge.



Gleicher Betrag, unterschiedliche Richtung



Gleiche Richtung, unterschiedlicher Betrag



Betrag und Richtung unterschiedlich

B4 Die Geschwindigkeit lässt sich durch einen Pfeil veranschaulichen.

3. Wenn sich die Geschwindigkeit ändert ...

Die Geschwindigkeit der Modelleisenbahn in → **V1** lässt sich mithilfe eines Trafos steuern. Während der Fahrt verringern wir plötzlich die Geschwindigkeit. Am Trafo selbst lassen sich die Geschwindigkeiten nicht ablesen. Mithilfe eines Bewegungsmesswandlers → **Interessantes** können wir jedoch auf dem Computer ein *t*-*s*-Diagramm dieser beiden gleichförmigen Bewegungen darstellen. Wie lassen sich daraus nun die Geschwindigkeiten der Eisenbahn ermitteln?

Das *t*-*s*-Diagramm → **B1** besteht aus zwei unterschiedlich steilen Geradenabschnitten. Der hellgrüne Abschnitt zeigt die bekannte Proportionalität zwischen s und t, denn er stellt eine Ursprungsgerade dar. Wir erhalten die Geschwindigkeit mithilfe des Quotienten aus dem vom Start zurückgelegten Weg s und der dafür benötigten Zeit t. Dies ist für den Zeitpunkt $t = 4$ s verdeutlicht. Wir erhalten:

$$v = 20\text{ cm}/(4\text{ s}) = 5\text{ cm/s}.$$

Außerdem kann man erkennen, dass der Weg $s = 20$ cm und die benötigte Zeit $t = 4$ s das hellgrüne Steigungsdreieck begrenzen. Der Quotient $v = s/t$ lässt sich also auch als Steigung des hellgrünen Geradenabschnitts auffassen.

Im dunkelgrünen Abschnitt von t_1 bis t_2 liegen die Messpunkte auch auf einer Geraden, allerdings geht sie nicht durch den Ursprung, s ist hier nicht proportional zu t. Wie lässt sich hier die Geschwindigkeit ermitteln? Wieder betrachten wir ein Steigungsdreieck (dunkelgrün). Die Seitenlängen des Dreiecks ergeben sich als Differenzen von Ort $(s_2 - s_1)$ und Zeit $(t_2 - t_1)$. $s_2 - s_1$ gibt den in der Zeit $t_2 - t_1$ zurückgelegten Weg an. Für die Geschwindigkeit erhält man:

$$v_2 = (s_2 - s_1)/(t_2 - t_1).$$

Setzt man die entsprechenden Werte ein, errechnet sich

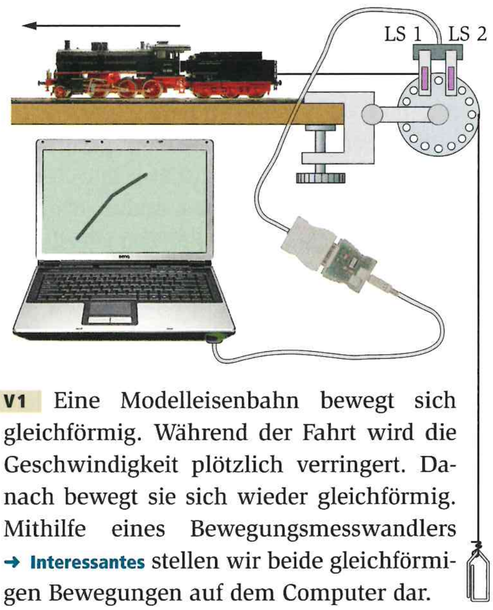
$$v_2 = \frac{30\text{ cm} - 20\text{ cm}}{8\text{ s} - 4\text{ s}} = \frac{10\text{ cm}}{4\text{ s}} = 2{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

In beiden Fällen ergab sich die Geschwindigkeit also als Steigung des entsprechenden Geradenabschnitts. Den zurückgelegten Weg und die dafür benötigte Zeit errechnet man aus Differenzen von Ort und Zeit.

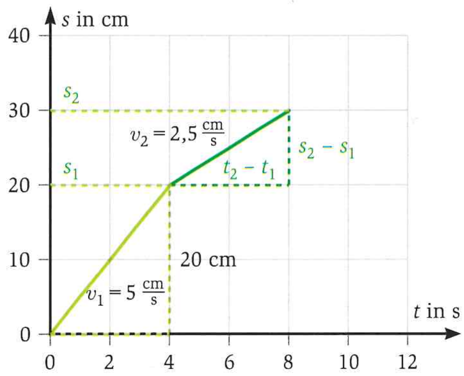
Merksatz

Bei einer gleichförmigen Bewegung ist die Steigung der Geraden im *t*-*s*-Diagramm die Geschwindigkeit v. Allgemein ist die Geschwindigkeit der Quotient aus der Differenz von Ort und Zeit:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$



V1 Eine Modelleisenbahn bewegt sich gleichförmig. Während der Fahrt wird die Geschwindigkeit plötzlich verringert. Danach bewegt sie sich wieder gleichförmig. Mithilfe eines Bewegungsmesswandlers → **Interessantes** stellen wir beide gleichförmigen Bewegungen auf dem Computer dar.



B1 Die Abbildung zeigt ein idealisiertes *t*-*s*-Diagramm der Bewegung der Modelleisenbahn. Die Geschwindigkeit für den hellgrünen Abschnitt ergibt sich aus der Steigung der Ursprungsgeraden bis zum Zeitpunkt $t_1 = 4$ s, also aus $v_1 = s/t$. Es gilt hier:

$$v_1 = 20\text{ cm}/4\text{ s} = 5\text{ cm/s}$$

Im dunkelgrünen Abschnitt zwischen t_1 und t_2, also im Zeitintervall

$$t_2 - t_1 = 8\text{ s} - 4\text{ s} = 4\text{ s},$$

ist der zurückgelegte Weg

$$s_2 - s_1 = 30\text{ cm} - 20\text{ cm} = 10\text{ cm}.$$

So kann man jetzt im Steigungsdreieck die Geschwindigkeit berechnen: Für v_2 ergibt sich so der Quotient:

$$v_2 = 10\text{ cm}/4\text{s} = 2{,}5\text{ cm/s}.$$

Vertiefung

Größen und Einheiten

Bei einer gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit als Quotient aus Weg und Zeit festgelegt. Ihre Einheit ergibt sich dabei automatisch, da sowohl der Weg als auch die benötigte Zeit jeweils mit ihrer Einheit angegeben werden.

Benötigt man z. B. für einen Weg von 200 Metern eine Zeit von 10 Sekunden, so ist die Geschwindigkeit 20 Meter pro Sekunde bzw. 20 m/s. Ist derselbe Weg aber in Kilometern angegeben, so berechnet sich die Geschwindigkeit mit 0,2 Kilometern in 10 Sekunden zu 0,02 km/s.

Die Angabe der **Maßzahl** alleine ist also nicht aussagekräftig. Um die Geschwindigkeit richtig anzugeben, benötigen wir immer auch die zugehörige **Maßeinheit**.

Auch bei der Aussage *„Wir sind 20 gefahren“* gilt dies. Sind 20 m/s gemeint, so könnte es sich um die Geschwindigkeit eines PKW auf der Landstraße handeln, sind aber 20 km/h gemeint, so wird vielleicht über die Geschwindigkeit beim Radfahren berichtet.

Mit m/s und km/h haben wir die bei uns üblichen Ei heiten für die Geschwindigkeit v kennen gelernt. I Straßenverkehr nimmt man normalerweise km/h. Nur deshalb kann man auf Verkehrsschildern die Ei heit für die Geschwindigkeit weglassen. Wenn w beim Autofahren unpräzise von „Tempo 30“ spreche bedeutet es 30 km/h. Wie rechnet man diese Geschwi digkeit in m/s um?

Wir schreiben: 1 km = 1000 m und 1 h = 3600 s. E „Tempo 30“ hat ein Auto die Geschwindigkeit

$$v = 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{30 \cdot 1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = 8{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ein Fußgänger, der „gut zu Fuß“ ist, legt in einer S kunde 1,6 m zurück. Er hat also die Geschwindigk $v = 1{,}6$ m/s. Welche Geschwindigkeit hat der Fußgä ger in km/h? Hier ersetzen wir 1 m durch 1/1000 k und 1 s durch 1/3600 h:

$$v = 1{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{1{,}6\ \text{m}}{1\ \text{s}} = \frac{1{,}6 \cdot \frac{1\ \text{km}}{1000}}{\frac{1\ \text{h}}{3600}} = \frac{1{,}6 \cdot 3600\ \text{km}}{1000\ \text{h}}$$

$$= 1{,}6 \cdot 3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 5{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Beispiel **Berechnung von v, s und t**

a) Die Berechnung der Geschwindigkeit:

Ein Auto durchfährt den Weg $s = 200$ m in der Zeit $t = 5$ s gleichförmig.
Gegeben: $s = 200$ m, $t = 5$ s
Gesucht: v

$$v = \frac{s}{t} = \frac{200\ \text{m}}{5\ \text{s}} = \frac{40\ \text{m}}{1\ \text{s}} = \frac{40 \cdot (1/1000)\ \text{km}}{(1/3600)\ \text{h}}$$

$$= \frac{40 \cdot 3600\ \text{km}}{1000\ \text{h}} = 40 \cdot 3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 144\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

b) Die Berechnung des Weges:

Bestimme den Weg s, den eine Radfahrerin in der Zeit $t = 20$ min mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 20$ km/h zurücklegt.
Gegeben: $t = 20$ min, $v = 20$ km/h
Gesucht: s
Zum Berechnen von s haben wir noch keine Gleichung. Wir können aber auf $v = s/t$ die Regeln der Algebra anwenden.

Wir multiplizieren die Gleichung $v = s/t$ auf beiden Seiten mit t und erhalten: $s = v \cdot t$.
Als Rechnung ergibt sich:

$$s = v \cdot t = 20\ \text{km/h} \cdot (1/3)\text{h} \approx 6{,}67\ \text{km}$$

c) Die Berechnung der Zeit:

Bestimme die Zeit t, die ein Flugzeug ($v = 600$ km/h) für den Weg $s = 1000$ km benötigt.
Gegeben: $s = 1000$ km, $v = 600$ km/h
Gesucht: t

Um t zu erhalten, dividieren wir die Gleichung $s = v \cdot t$ auf beiden Seiten durch v und erhalten neue Gleichung $s/v = t$.
Als Rechnung ergibt sich:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{1000\ \text{km}}{600\ \text{km/h}} \approx 1{,}67\ \text{h}\ (1\ \text{h}\ 40\ \text{min})$$