

Übersicht

7. Quantenpunkte

7.1 Nachweis des 1D-Charakters

7.2 Coulomb-Blockade

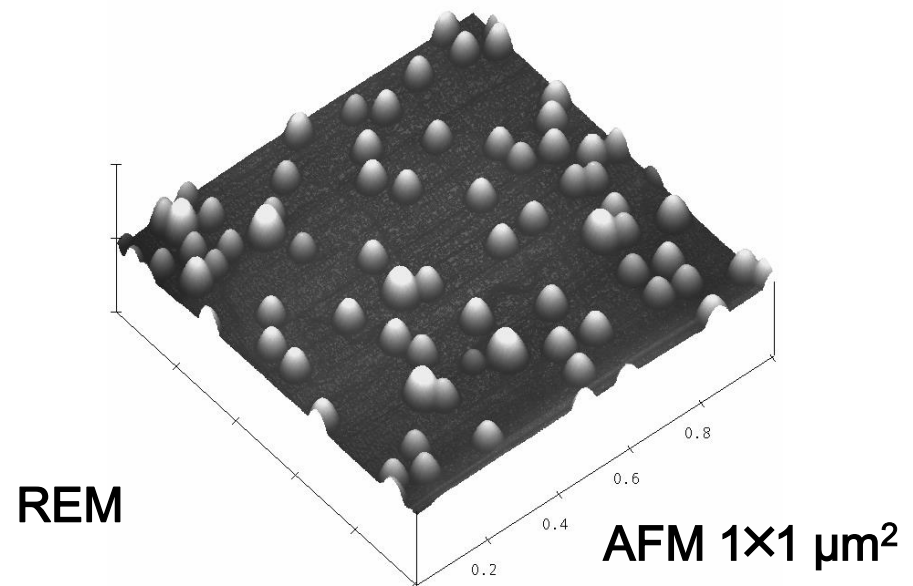
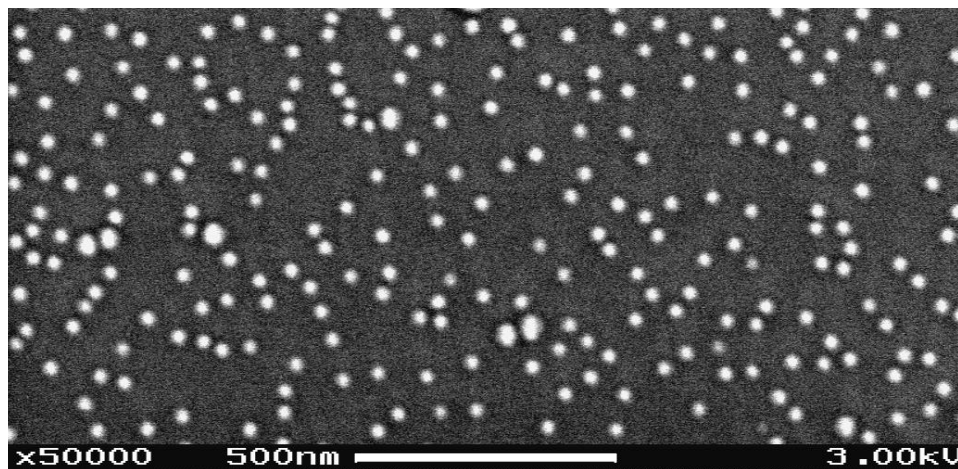
7.3 Niveaustuktur

7. Quantenpunkte

7.1 Nachweis des 0D-Charakters

Quantisierung + Coulomb-Blockade

Besonders kleine QDs entstehen durch **selbstordnende Abscheidung** von Halbleitermaterialien im Stranski-Krastanov-Wachstumsmodus. Im InAs/GaAs-System entsteht eine hohe Flächendichte ($10^9 \dots 10^{11} \text{ cm}^{-2}$) von QDs mit enger Größenverteilung. Mit GaAs überwachsen sind sie etwa scheibenförmig mit $D \approx 20 \dots 30 \text{ nm}$ und $h \approx 3 \dots 5 \text{ nm}$.



D. Leonard, M. Krishnamurthy, C. M. Reeves, S. P. Denbaars, P. M. Petroff, Appl. Phys. Lett. **63**, 3203 (1993)
 H. Drexler, D. Leonard, W. Hansen, J.P. Kotthaus, P.M. Petroff, Phys. Rev. Lett. **73**, 2252 (1994)

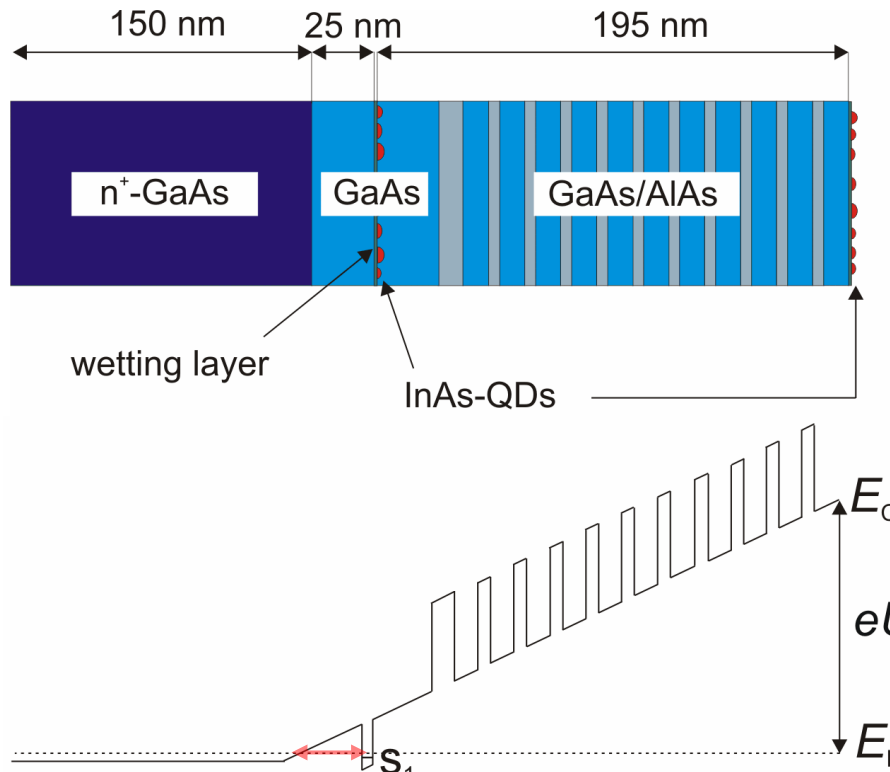
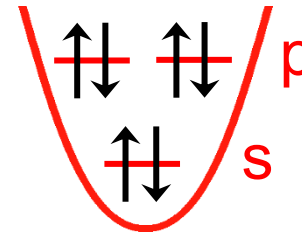
7. Quantenpunkte

7.1 Nachweis des 0D-Charakters

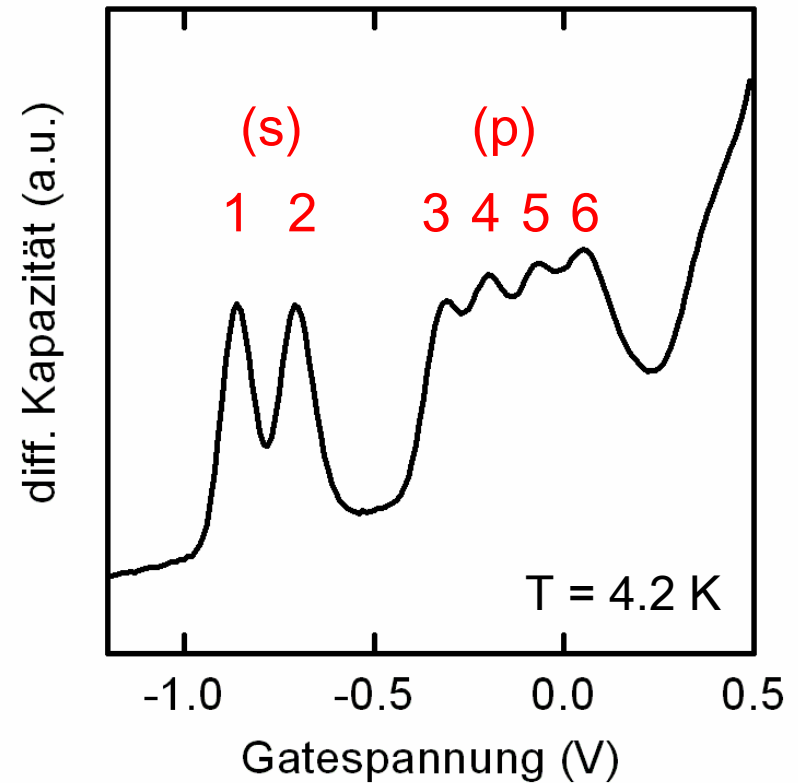
Quantisierung + Coulomb-Blockade

Charakterisierung des **Ensembles** durch **Kapazitätsspektroskopie:**

Coulomb-blockiertes Tunneln



Laden durch Tunneln ändert Kapazität



C. Bock, Elektronische Struktur selbstorganisierter InAs-Quantenpunkte. (Dissertation, Ruhr-Universität Bochum 2003); A. D. Wieck, priv. Mitteilung

7. Quantenpunkte

7.2 Coulomb-Blockade

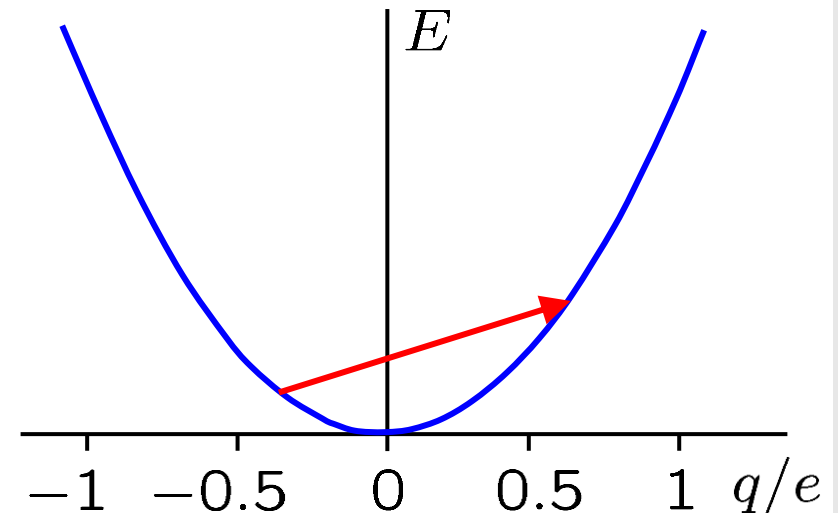
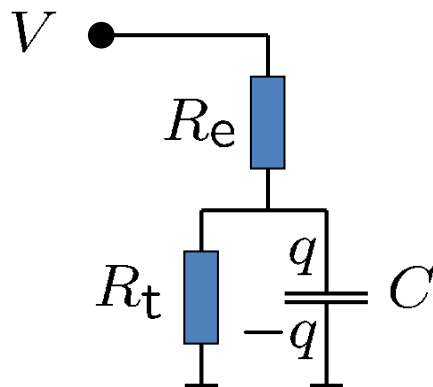
Prinzip der Coulomb-Blockade

Betrachte einen Tunnelkontakt unter Vorspannung V mit der Kapazität C und dem Tunnelwiderstand R_t :

Tunneln eines Elektrons ($\Delta q = e$) erfordert immer Ladeenergie, falls die Anfangsladung klein ist:

$$|q| < e/2$$

Die Elektronen tunneln bei $V = V_{\min}$ **einzeln**.



T. Heinzel: Mesoscopic electronics in solid state nanostructures. Wiley-VCH, Weinheim 2003;
 K.K. Likharev, IBM Journal of Research and Development **32**, 144 (1988); M. H. Devoret *et al.* Phys. Rev. Lett. **64**, 1824 (1990)]

7. Quantenpunkte

7.2 Coulomb-Blockade

Prinzip der Coulomb-Blockade

Energieaufwand für das Tunneln eines Elektrons, Anfangsladung ist $|q| < e/2$:

$$\Delta E^+ = \frac{(q - e)^2}{2C} - \frac{q^2}{2C} \quad \Delta E^- = \frac{(q + e)^2}{2C} - \frac{q^2}{2C}$$

Für $q = 0$ gilt: $\Delta E^+ = \Delta E^- = \frac{e^2}{2C} = E_C$ (Blockadeenergie)

Minimale Spannung für Einsatz des Tunnelvorgangs:

$$V_{\min}^+ = \frac{(2q - e)}{2C} \quad V_{\min}^- = \frac{(2q + e)}{2C}$$

Coulomb-Blockadebereich: $e\Delta V = eV_{\min}^+ - eV_{\min}^- = \frac{e^2}{C} = 2E_C$

7. Quantenpunkte

7.2 Coulomb-Blockade

Prinzip der Coulomb-Blockade

Bedingungen für die Beobachtung der Coulomb-Blockade:

1. Vermeidung therm. Aktivierung: $k_B T \ll E_C$

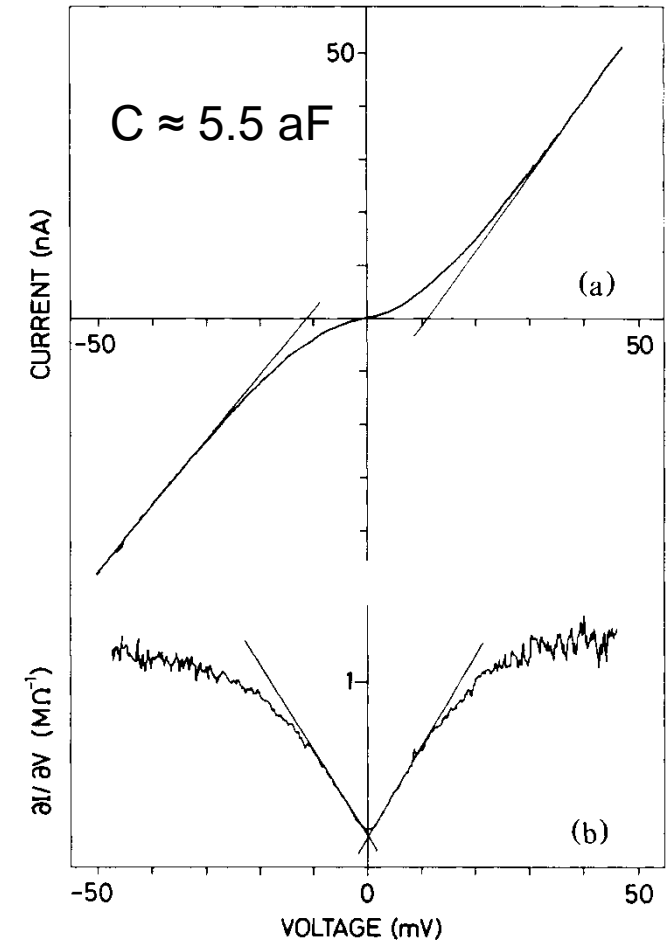
2. Vermeidung von Quantenfluktuationen der Ladung: $\delta E \cdot \tau \approx h$

Zeitkonstante für Ladungsfluktuationen:

$$\tau_e \approx R_e C \quad \tau_t \approx R_t C$$

Energieunschärfe darf Blockade nicht zerstören:

$$\delta E \ll E_C \quad R_{e,t} \gg \frac{h}{e^2}$$



Wolfram-Spitze gegen $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7.5}$

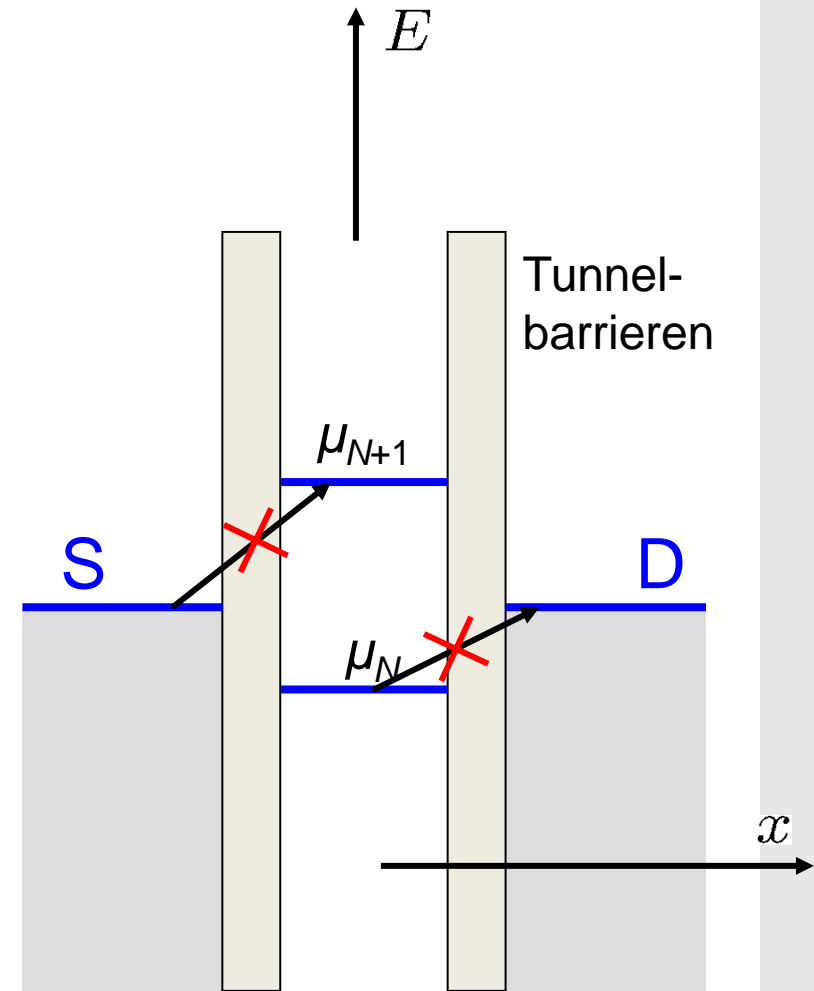
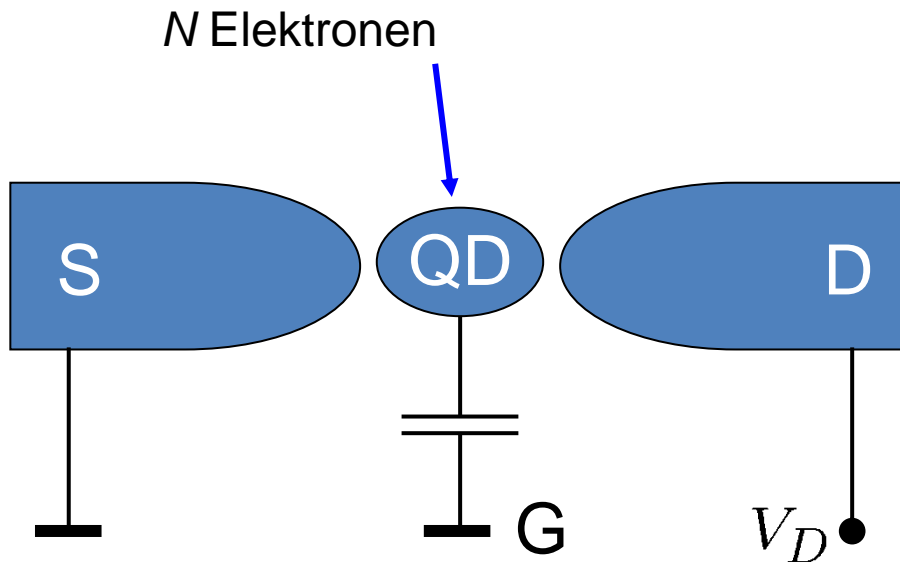
P. J. M. van Benthum *et al.* Phys. Rev. Lett. **60**, 369 (1990)

7. Quantenpunkte

7.2 Coulomb-Blockade

Einzel-Elektronen-Transistor

Steuerbare Coulomb-Blockade beim Tunneln über eine Insel: **Transport blockiert**



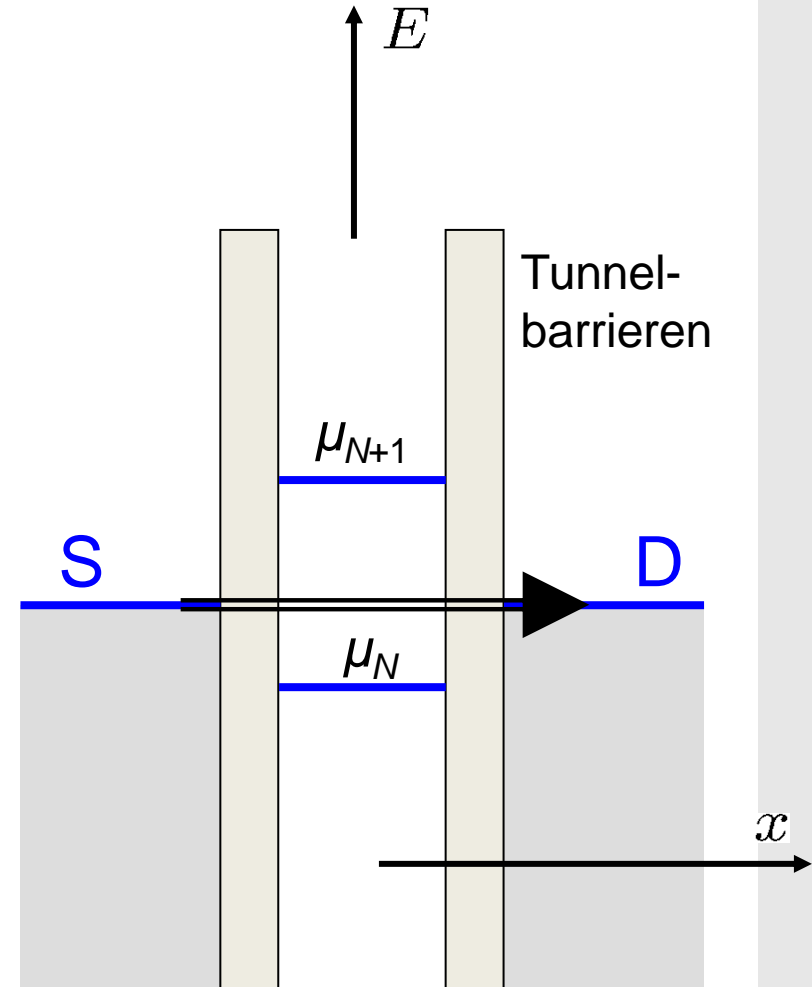
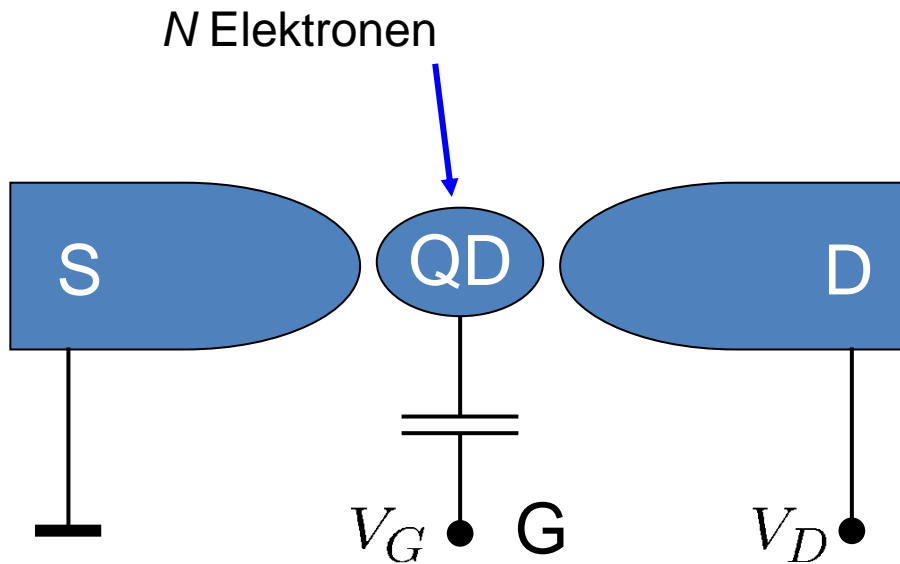
U. Meirav, E.B. Foxman, *Semicond. Sci. Technol.* **11**, 255 (1996); H. van Houten, C.W.J. Beenaker, A. A. M. Staring, In "Single Charge Tunneling", Eds. H. Grabert, M.H. Devoret. Plenum, New York 1992, pp. 167-216

7. Quantenpunkte

7.2 Coulomb-Blockade

Einzel-Elektronen-Transistor

Steuerbare Coulomb-Blockade beim Tunneln über eine Insel: **Transport möglich**

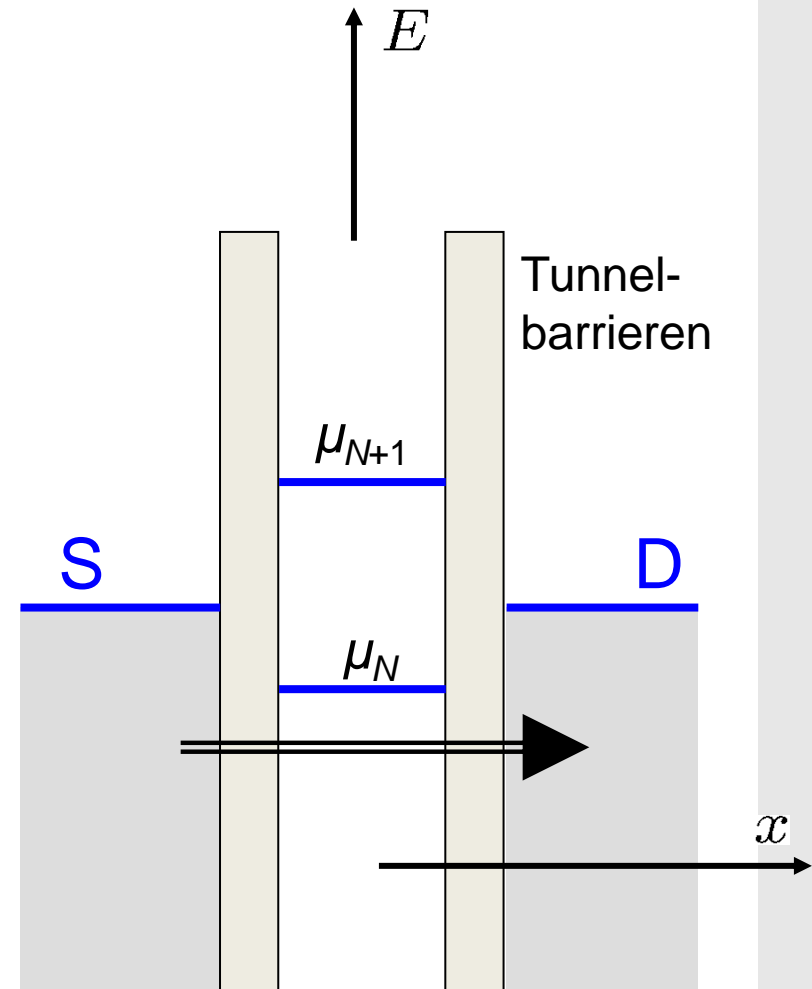
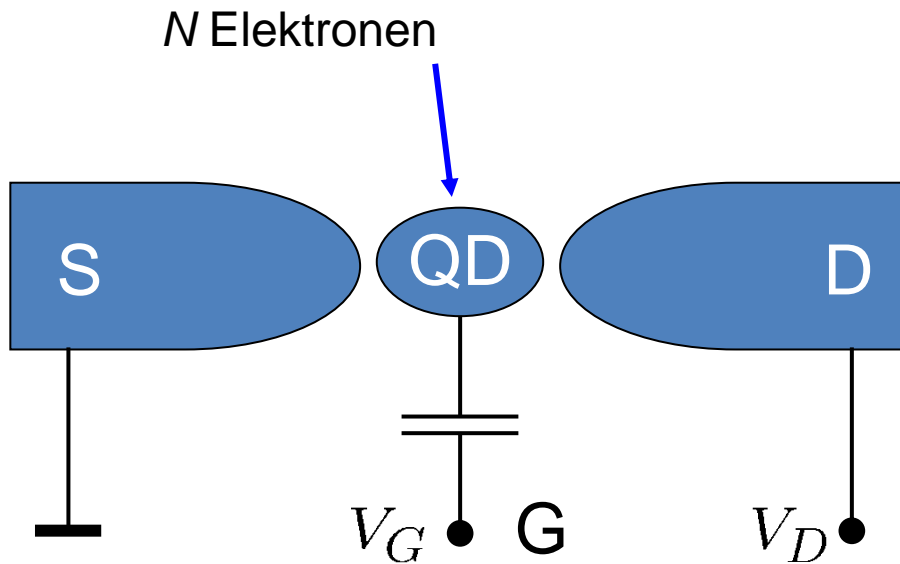


7. Quantenpunkte

7.2 Coulomb-Blockade

Einzel-Elektronen-Transistor

Steuerbare Coulomb-Blockade beim Tunneln über eine Insel: **Transport möglich**



7. Quantenpunkte

7.2 Coulomb-Blockade

Einzel-Elektronen-Transistor

Elektrostatische Energie der Insel mit Ladung $Q < 0$ unter Einfluss von V_{ext} :

$$E = QV_{\text{ext}} + \frac{Q^2}{2C}$$

Stetig variable induzierte Ladung einführen: $Q_{\text{ext}} = -CV_{\text{ext}}$

$$E = \frac{(Q - Q_{\text{ext}})^2}{2C} - \frac{Q_{\text{ext}}^2}{2C} \quad (Q = -Ne)$$

Übergang von N auf $N + 1$ Elektronen auf der Insel: $E_{N+1} = E_N$

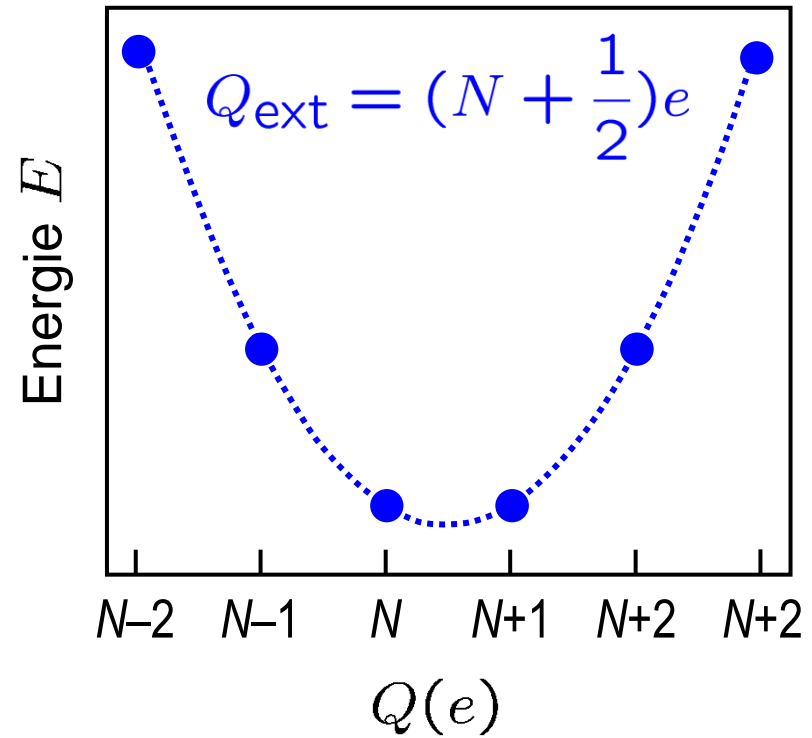
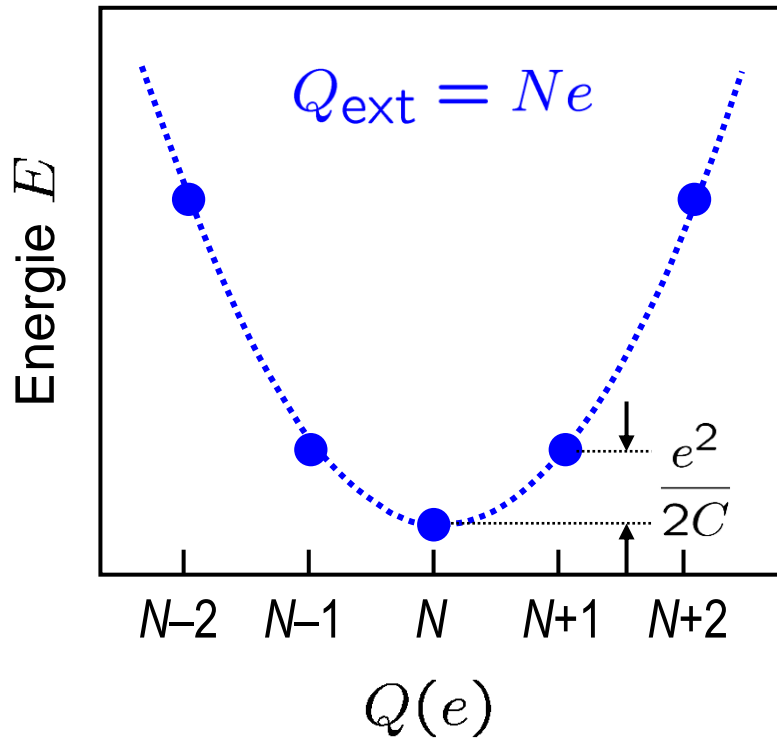
$$Q_{\text{ext}} = -\left(N + \frac{1}{2}\right)e \quad \Delta Q_{\text{ext}} = e$$

7. Quantenpunkte

7.2 Coulomb-Blockade

Einzel-Elektronen-Transistor

Graphische Darstellung der Energie-Beziehung:

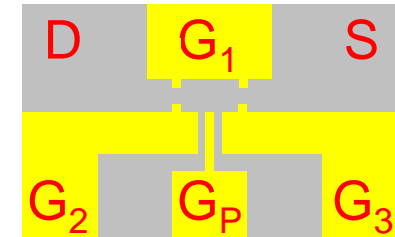


M.A. Kastner, Rev. Mod. Phys. **64**, 849-858 (1992)

7. Quantenpunkte

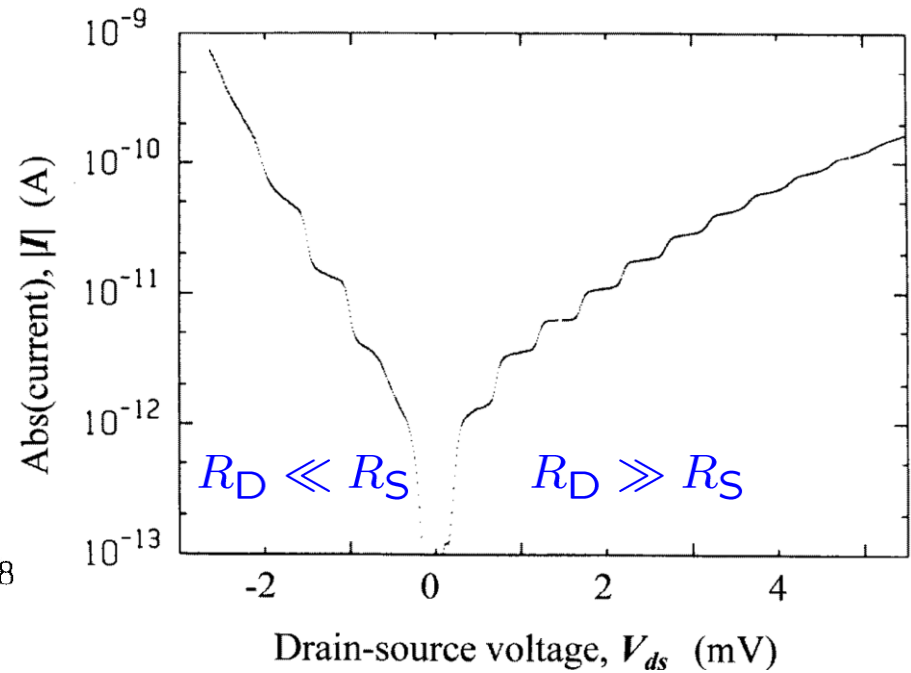
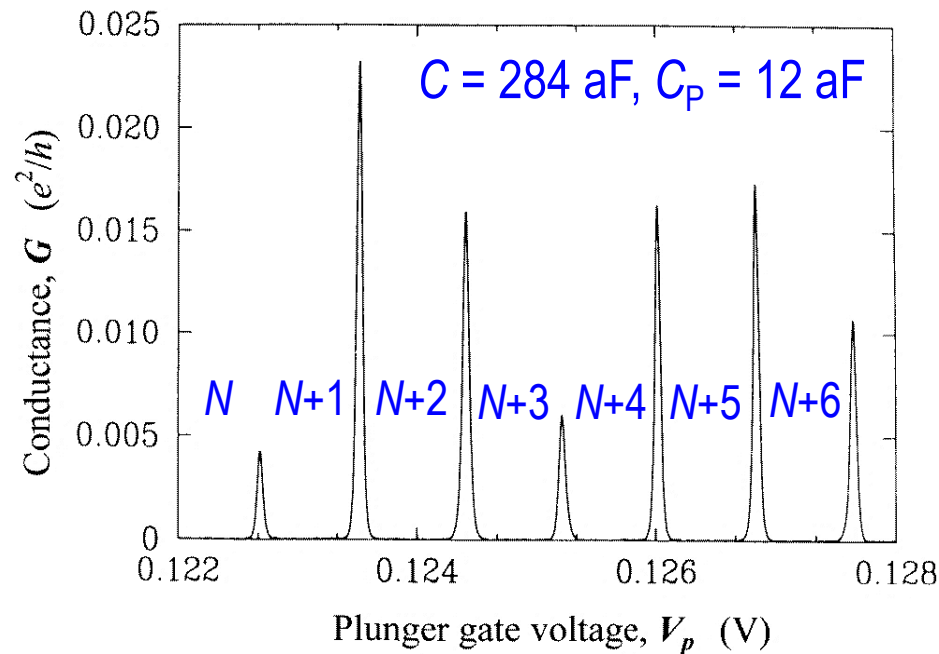
7.2 Coulomb-Blockade

Einzel-Elektronen-Transistor



Steuerbare Coulomb-Blockade beim Tunneln über eine Insel:

Coulomb-Oszillationen und **Coulomb-Treppe** eines planaren Quantenpunkts



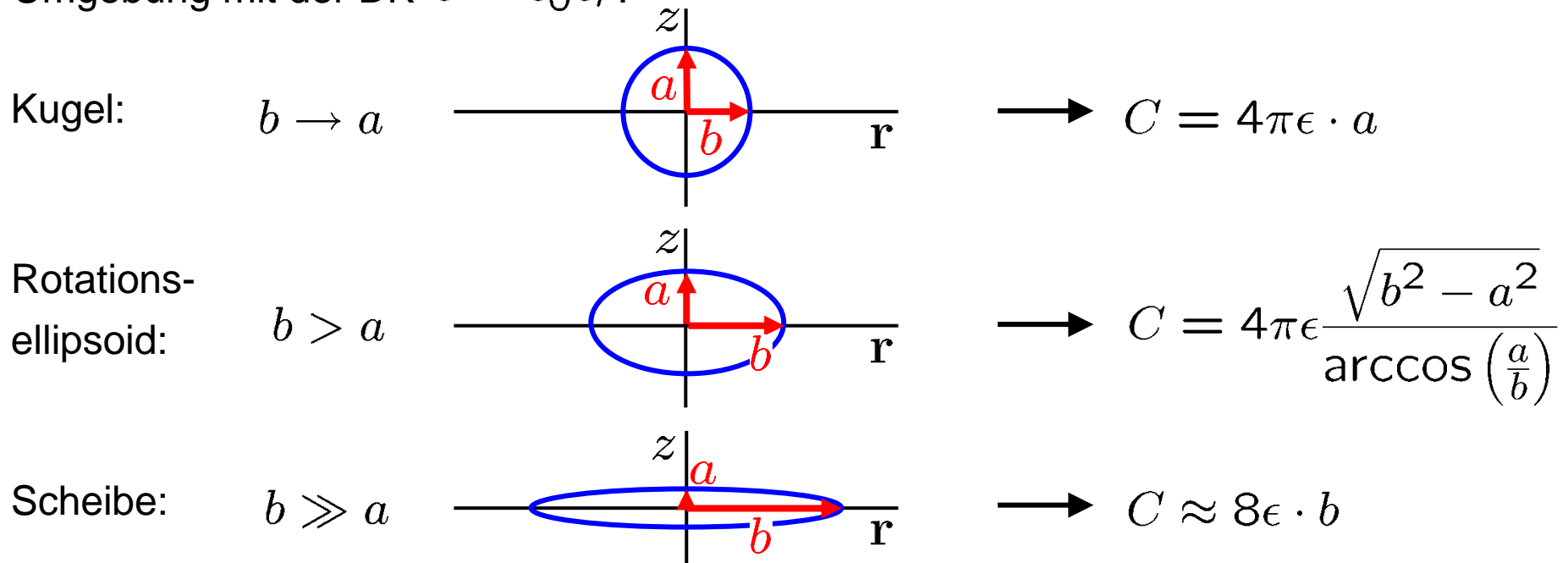
U. Meirav, E.B. Foxman, Semicond. Sci. Technol. 11, 255 (1996)

7. Quantenpunkte

7.2 Coulomb-Blockade

Einschub: Kapazität einer Insel

Metallisches ellipsoidales Partikel in einer dielektrischen Umgebung mit der DK $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$:



Elektronen-Scheibchen in GaAs: $\epsilon_s = 13.1$, 2DEG, $b = 100 \text{ nm}$: $C \approx 46 \text{ aF}$

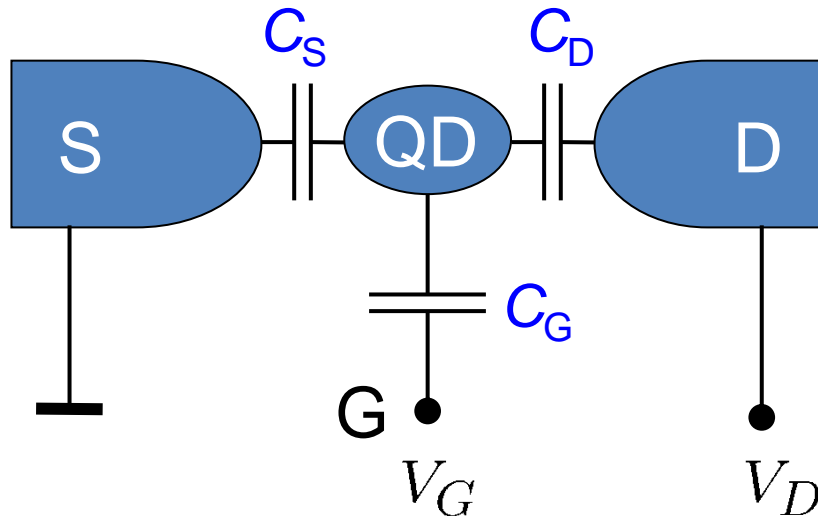
G. Lautz, Elektromagnetische Felder. Teubner, Stuttgart 1969

7. Quantenpunkte

7.2 Coulomb-Blockade

Periode der Coulomb-Oszillationen

Die Steuerung durch die Gate-Spannung erfolgt nach Maßgabe der Kapazitäten des Quantenpunkts (*Quantum Dot*, QD) gegenüber der Umgebung:



Gesamtkapazität: $C = \sum_i C_i$

$$V_{\text{ext}} = V_{\text{Coulomb}} + V_G$$

$$V_G = -\frac{Q_G}{C_G}$$

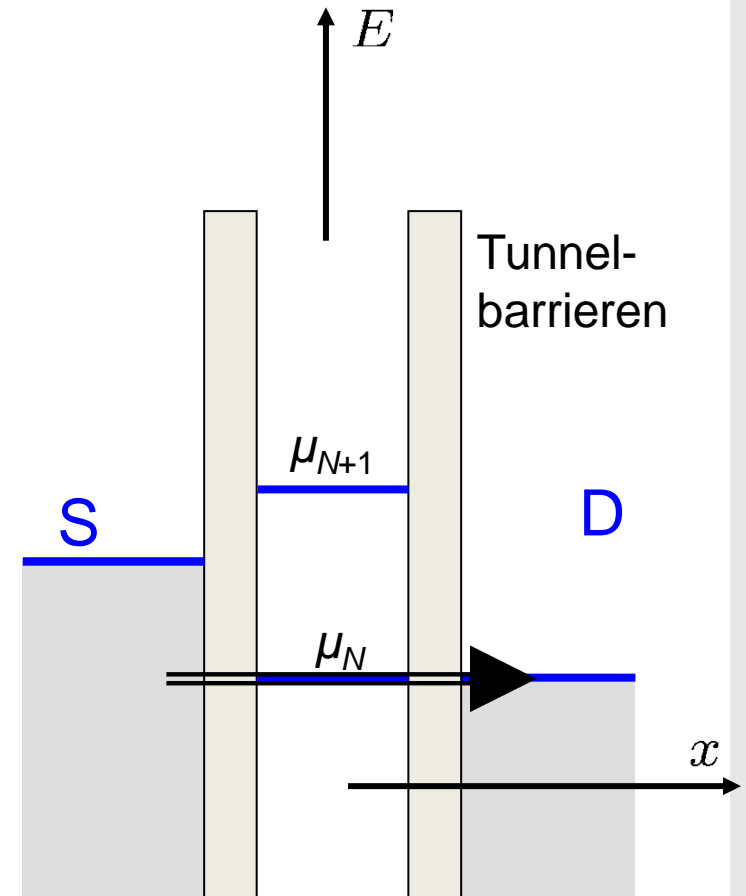
$$\Delta V_G = \frac{C}{C_G} \Delta V_{\text{ext}} = \frac{e}{C_G}$$

7. Quantenpunkte

7.2 Coulomb-Blockade

Stabilitätsdiagramm

Eine endliche Drain-Spannung ändert die Größe des Blockade-Intervalls der Gate-Spannung:

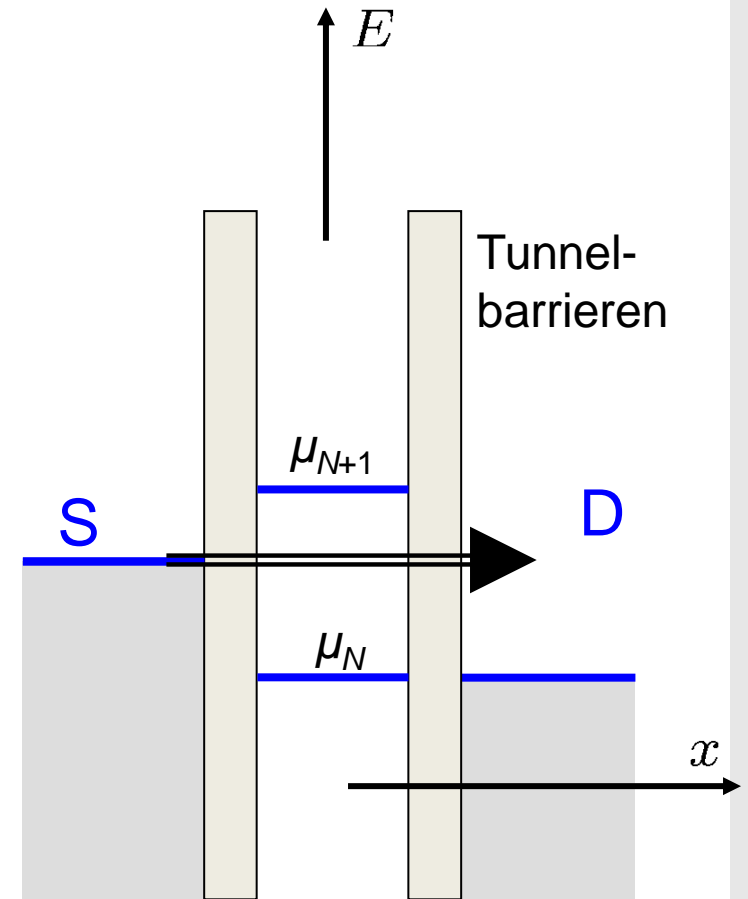
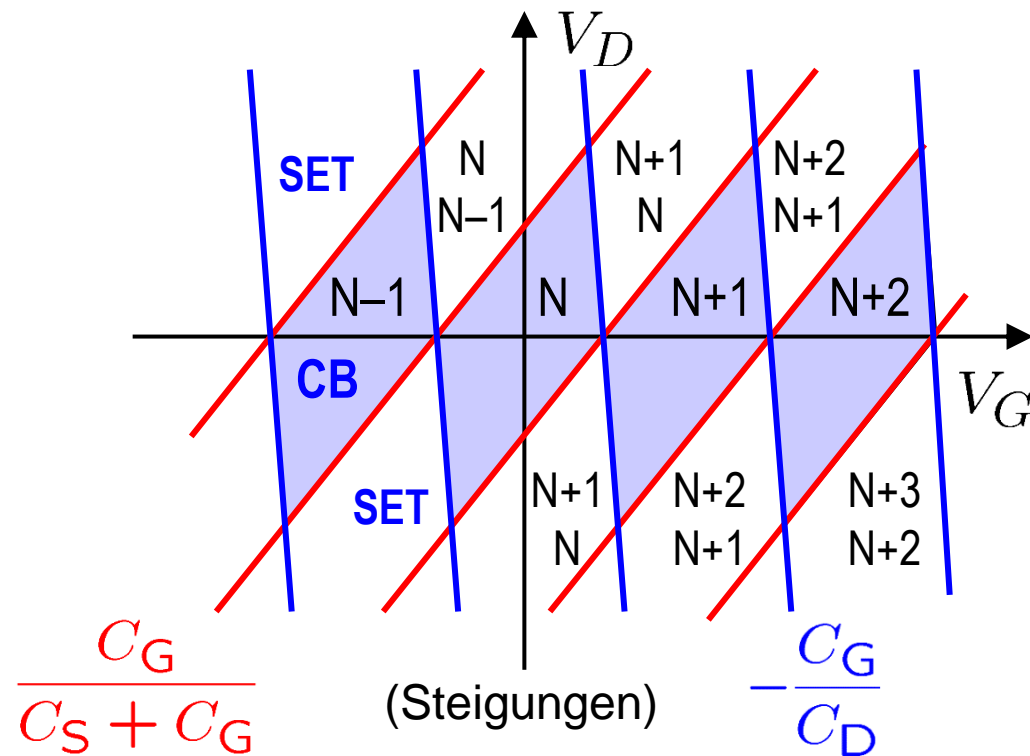


7. Quantenpunkte

7.2 Coulomb-Blockade

Stabilitätsdiagramm

Eine endliche Drain-Spannung ändert die Größe des **Blockade-Intervalls** der **Gate-Spannung**:



7. Quantenpunkte

7.3 Niveaustuktur

Einschränkungspotential

Wie für 1D-Elektronensysteme sind die **Einschränkungspotentiale** und **Eigenfunktionen** bei lateral auf 0D eingeschränkten Quantenfilmen gut **separierbar**:

$$\psi_k(\mathbf{r}, z) = \phi_{n,l}(\mathbf{r}) \cdot \zeta_i(z)$$

wobei $\phi_{n,l}(\mathbf{r})$ eine Lösung der 2D-Schrödinger-Gleichung ist und $\mathbf{r} = (x, y)$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_x} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{2m_y} \frac{d^2}{dy^2} + V(\mathbf{r}) \right] \phi_{n,l}(\mathbf{r}) = E_{n,l} \phi_{n,l}(\mathbf{r})$$

Ein häufiger Spezialfall ist das **radialsymmetrische harmonische Einschränkungspotential** und eine isotrope effektive Masse:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 (x^2 + y^2)$$

7. Quantenpunkte

7.3 Niveaustuktur

Einschränkungspotential

$$\mathbf{B} = (0, 0, B)$$

Wenn zusätzlich ein schichtsenkrecht **Magnetfeld** angelegt wird, lautet das resultierende magnetoelektrische Einschlusspotential:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m^*\Omega^2(x^2 + y^2) + \frac{\omega_C}{2}L_z, \quad \Omega^2 = \omega_0^2 + \omega_C^2$$

Die Niveaustuktur wird durch die **Fock-Darwin-Zustände** beschrieben:

$$E_{i,n,l} = E_i + (2n + |l| + 1) \hbar \left(\omega_0^2 + \frac{1}{4}\omega_C^2 \right)^{1/2} - \frac{1}{2}\hbar\omega_C l \pm g^* \mu_B B$$

Radiale Quantenzahl: $n = 0, 1, 2, \dots$

Drehimpuls-Quantenzahl: $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

T. Heinzel: Mesoscopic electronics in solid state nanostructures. Wiley-VCH, Weinheim 2003

7. Quantenpunkte

7.3 Niveaustuktur

Eigenwerte

Für $B = 0$ liegen alle **Eigenwerte** bei Energien

$$E = E_i + j\hbar\omega_0$$

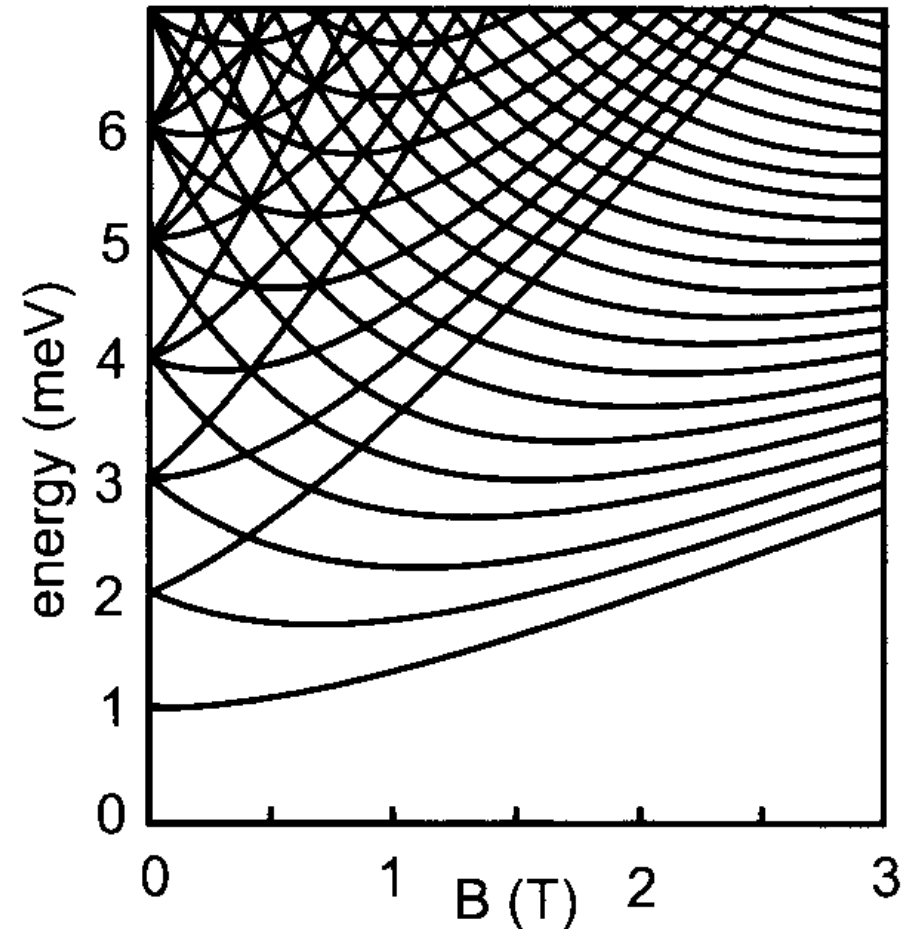
mit

$$j = 2n + |l| = 0, 1, 2, \dots$$

Die **Entartung der Niveaus**

(einschließlich Spin) beträgt $2j$.

Ein Magnetfeld hebt die orbitale Entartung auf, dadurch entstehen Niveauüberkreuzungen (ohne Spin).



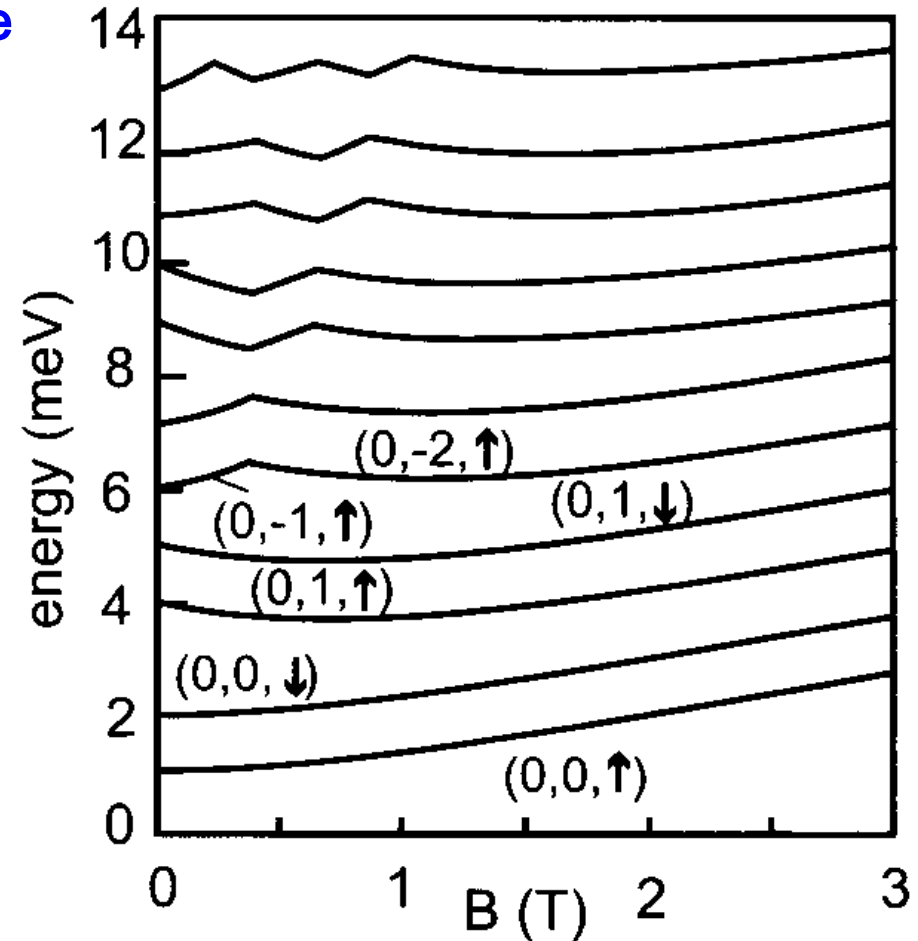
7. Quantenpunkte

7.3 Niveaustuktur

Quantisierung und Coulomb-Blockade

Falls die **Spinentartung** durch die Coulomb-Blockade aufgehoben ist, treten alle Dispersionszweige doppelt auf (hier $\Delta E_C = 1$ meV).

Die **Niveaüberkreuzungen** im Magnetfeld werden i.a. durch Wechselwirkung aufgehoben.



7. Quantenpunkte

7.3 Niveaustuktur

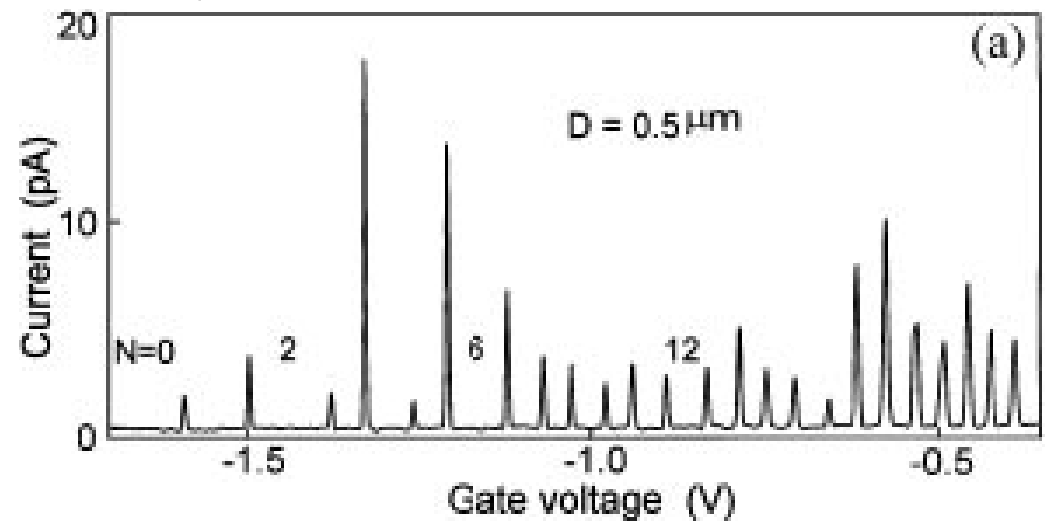
Quantisierung und Coulomb-Blockade

Während metallische Inseln und große HL-QDs nur die Coulomb-Blockade zeigen, äußert sich in kleinen HL-QDs in den Coulomb-Oszillationen die Niveaustuktur durch

Abweichungen von der strikten Periodizität:

$$e\Delta V_G|_{N,N+1} = \frac{C}{C_G} \left(\frac{e^2}{C} + \Delta E_{N,N+1} \right)$$

Da in ebenen QDs die Entartung eines Niveaus genau $2j$ ($j = 1, 2, 3, 4, \dots$) beträgt, sind bei $N = \sum 2j$ Elektronen die einzelnen Schalen gefüllt:
 $N = 2, 6, 12, 20, \dots$ ("künstliche Atome").



S. Tarucha *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77**, 3613 (1996)