Analysis II (29.1.)

(9.17) **Satz:** Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und $N \subseteq Q$ eine J-messbare Nullmenge.
Dann ist f über N R-int. und
$$\int_N f(x)dx = 0.$$

Beweis: Wähle $C \in \mathbb{R}$, s.d. $|f(x)| \leq C \ \forall x \in Q$.

N J-messbar $\Rightarrow \overline{N} = N \cup \partial N$ J-messbar Nullmenge

$\overline{N} \subset Q$ abg. $\Rightarrow \overline{N}$ kompakt.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists Q_1, \ldots, Q_N \subseteq Q$ offene Quader mit
$$\overline{N} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} Q_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{N} \mathrm{vol}_n(Q_i) < \varepsilon/C$$

$f|_N \equiv 0$ außerhalb der Q_i. D.h. für hinreichend feine Zerlegungen Z von Q gilt:
$$-\varepsilon < \sum \inf(f|_{Q_i}) \mathrm{vol}_n(Q_i) \leq \underline{\Sigma}(f|_N, Z) \leq \overline{\Sigma}(f|_N, Z)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{N} \sup(f|_{Q_i}) \mathrm{vol}(Q_i) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \overline{\Sigma}(f|_N, Z) - \underline{\Sigma}(f|_N, Z) < 2\varepsilon$$

$\Rightarrow$ $f|_N$ R-int. und $\int_N f(x)\,dx = \int_Q f|_N(x)\,dx = 0$.

<u>(9.18) Satz:</u> Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f: Q \to \mathbb{R}$ R-int. und $N \subseteq Q$ J-messbare Nullmenge.

Ist $g: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und $f \equiv g$ auf $Q \setminus N$, so ist g R-int. und

$$\int_Q g(x)\,dx = \int_Q f(x)\,dx .$$

<u>Beweis:</u> Wie im Beweis von (9.17) gilt: $\overline{N} = N \cup \partial N$ ist eine kompakte J-messbare Nullmenge in Q.

$$Q \setminus (\partial Q \cup \overline{N}) = \mathring{Q} \setminus \overline{N} \subseteq Q \setminus N \text{ offen}.$$

$$\Rightarrow \partial(Q \setminus N) \subseteq \partial Q \cup \overline{N} \quad \text{Nullmenge}$$

$$\Rightarrow Q \setminus N \quad \text{J-messbar}$$

$\Rightarrow$ $f_0 := f|_N$ und $f_1 := f|_{Q\setminus N}$ R-int. und $f = f_0 + f_1$

$\Rightarrow$ $g|_{Q\setminus N} = f|_{Q\setminus N}$ R-int. und nach (9.17) ist $g|_N$ R-int.

$\Rightarrow$ $g = g|_{Q\setminus N} + g|_N$ R-int. über Q mit

$$\int_Q g\,dx = \int_W g\,dx + \int_{Q\setminus W} g\,dx = \int_{Q\setminus W} f\,dx$$

$$= \int_Q f\,dx.$$

(9.19) Satz von Fubini für Riemannintegrale

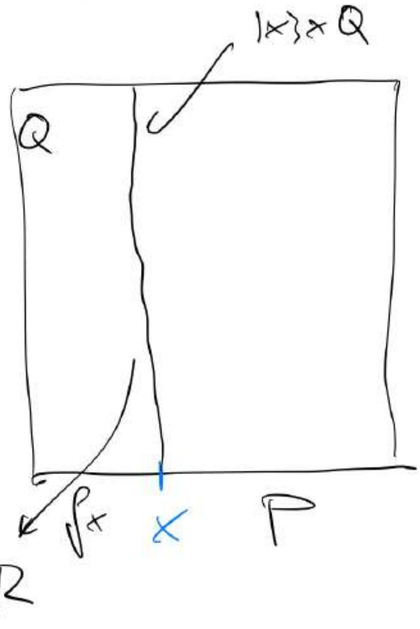
Sei $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$ abg. Quader, $f: P\times Q \to \mathbb{R}$ beschränkte R-int. Funktion ($P\times Q \subset \mathbb{R}^{p+q}$ Quader). Für $x \in P$ definiere $f_x: Q \to \mathbb{R}$, $f_x(y) := f(x,y)$.

Dann sind die Funktionen

$x \mapsto \underline{\int}(f_x)$ (Unterintegral von f_x)

$x \mapsto \overline{\int}(f_x)$ (Oberintegral von f_x)

R-integrierbar und

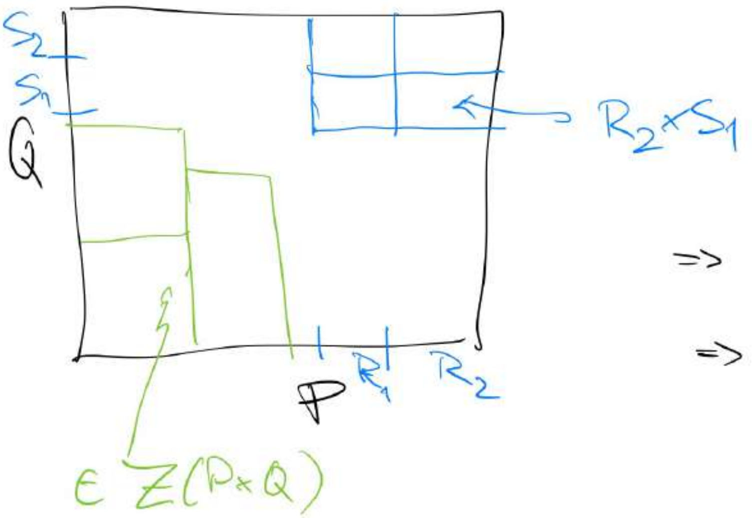


$$\int_{P\times Q} f(x,y)\,d(x,y) = \int_P \underline{\int}(f_x)\,dx$$

$$= \int_P \overline{\int}(f_x)\,dx$$

Beweis: Seien $Z_P \in \mathcal{Z}(P)$ und $Z_Q \in \mathcal{Z}(Q)$

$$\Rightarrow Z_P \times Z_Q := \{R\times S \mid R \in Z_P,\ S\in Z_Q\} \in \mathcal{Z}(P\times Q)$$



Sei $T := R \times S \in Z_P \times Z_Q$
und $x_0 \in R$

$$\Rightarrow \quad m_T(f) := \inf(f|_T) \leq f(x_0, y) \quad \forall y \in S.$$

$$\Rightarrow \quad m_T(f) \leq \inf\{f(x_0, y) \mid y \in S\}.$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{S \in Z_Q} m_T(f)\, \mathrm{vol}_q(S) \leq \sum_{S \in Z_Q} \inf(f_{x_0}|_S)\, \mathrm{vol}_q(S)$$

$$\leq \underline{\Sigma}(f_{x_0}, Z_Q) \leq \underline{\Sigma}(f_{x_0})$$

$x_0 \in R$ beliebig

$$\Rightarrow \quad \sum_{S \in Z_Q} m_T(f)\, \mathrm{vol}_q(S) \leq \inf\{\underline{\Sigma}(f_x) \mid x \in R\}.$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\Sigma}(f, Z_P \times Z_Q) = \sum_T m_T(f)\, \underbrace{\mathrm{vol}_n(T)}_{= \mathrm{vol}_p(R) \cdot \mathrm{vol}_q(S)} \qquad (n = p + q)$$

$$\leq \sum_{R \in Z_P} \underbrace{\inf\{\underline{\Sigma}(f_x) \mid x \in R\}}_{=: I_*} \mathrm{vol}_p(R)$$

$$= \underline{\Sigma}(I_*, Z_P) \qquad (I_* : P \to \mathbb{R})$$

$$\underline{\Sigma}(f, Z_P \times Z_Q) \leq \underline{\Sigma}(I_*, Z_P) \leq \overline{\Sigma}(I_*, Z_P)$$

$$\leq \overline{\Sigma}(I^*, Z_P) \leq \overline{\Sigma}(f, Z_P \times Z_q)$$

wobei $I^* := \sup\{\Sigma(f_x) \mid x \in R\}$.

f R-int. $\Rightarrow$ I_*, I^* R-integrierbar und $I_* \leq f \leq I^*$

Damit folgt die Behauptung auf die R-Integrierbarkeit von f.

(9.20) Folgerung $P \subseteq \mathbb{R}^p$, $Q \subseteq \mathbb{R}^q$ abg. Quader, $f: P \times Q \to \mathbb{R}$ beschränkt + R-int. Existiert eine J-messbare Nullmenge $N \subseteq P$, s.d. f_x R-int. für alle $x \in P \setminus N$ ($N = \emptyset$ zugelassen), so ist die Funktion $I_Q f: P \to \mathbb{R}$ mit

$$I_Q f(x) := \int_Q f_x(y)\,dy \quad \text{R-int. und}$$

$$\int_{P \times Q} f(x,y)\,d(x,y) = \int_P I_Q f(x)\,dx = \int_P \left(\int_Q f(x,y)\,dy\right) dx.$$

Bemerkung: Iteration der Spaltungen $P \times Q = (P_1 \times P_2) \times (Q_1 \times Q_2)$ usw.

Für $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\int_{\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]} f(x_1, \dots, x_n)\,d(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n \; +$$

Permutation der Integrationsreihenfolge.

Beweis: Es gilt: $I_Q(f) = I_* = I^*$ auf $P \setminus N$.

(9.19) $\Rightarrow$ $I_* = I^*$ R-int.

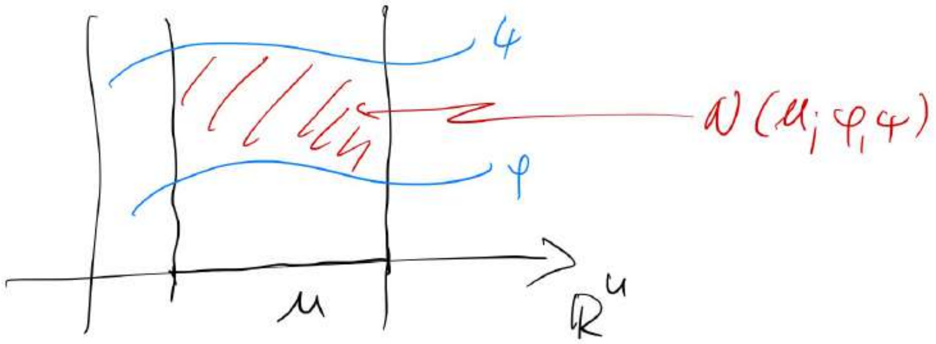
(9.18) $\Rightarrow$ $I_Q(f)$ R-int. + Gleichheit der Integrale

Definition: $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ abg. Quader, $M \subseteq Q$ J-messbare Menge.

Ein **Normalbereich** über M ist eine Menge der Form

$$N(M;\varphi,\psi) := \{(x,t) \in M \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \le t \le \psi(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

wobei $\varphi,\psi : Q \to \mathbb{R}$ stetig mit $\varphi(x) \le \psi(x)$ $\forall x \in Q$.



Bemerkung: $N(M;\varphi,\psi)$ ist J-messbar

- M J-messbar $\Rightarrow$ ∂M Nullmenge in $\mathbb{R}^n$
- $\exists\ \underline{c}, \overline{c} \in \mathbb{R}$: $\underline{c} \le \varphi(x) \le \psi(x) \le \overline{c}$ $\forall x \in Q$

$\Rightarrow$ $\partial M \times [\underline{c}, \overline{c}] \cap \overline{N}(M;\varphi,\psi)$ Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$

Graphen von φ und ψ sind Nullmengen in $\mathbb{R}^{n+1}$ $(\Gamma(\varphi), \Gamma(\psi))$

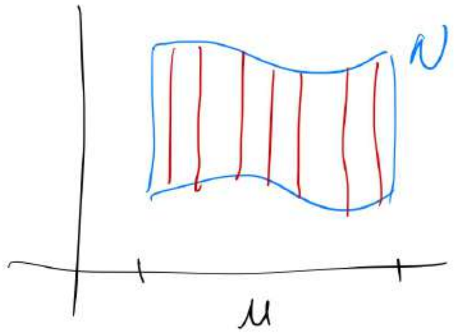
$$\Rightarrow \partial N(M;\varphi,\psi) = \left(\partial M \times [\underline{c}, \overline{c}] \cap \overline{N}\right) \cup \Gamma(\varphi)_M \cup \Gamma(\psi)_M$$

Nullmenge.

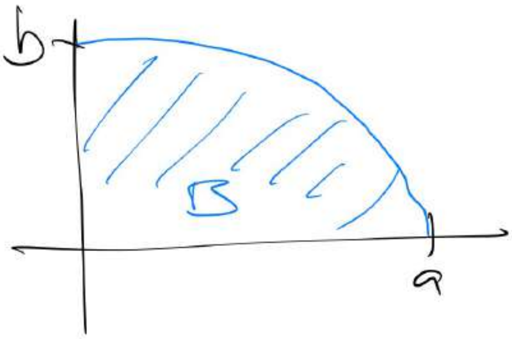
Sei $f : N(M,\varphi,\psi) \to \mathbb{R}$ R-int. (d.h. $f \cdot \chi_N$ R-int.),

folgt mit dem Satz von Fubini:

$$\int_{N(\mathcal{U};\varphi,\psi)} f(x,t)\,d(x,t) = \int_{\mathcal{U}} \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)\,dt \right) dx$$



Beispiele: (1) Sei $\mathcal{U} = [0,a]$, $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ für $a,b>0$.



$B := N(\mathcal{U};\varphi,\psi)$

$\Rightarrow$ B ist ein Normalbereich über $\mathcal{U} = [0,a]$.

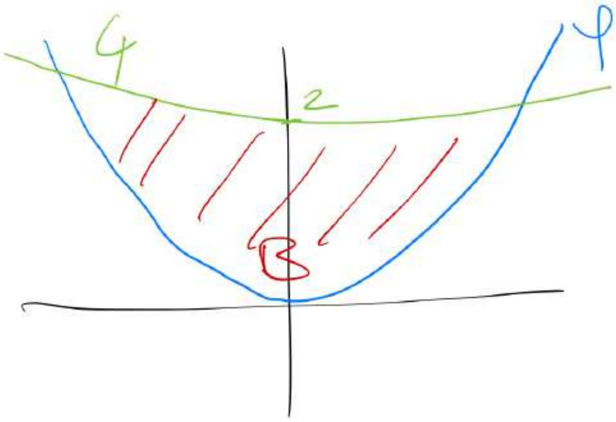
Betrachte $f(x,y) = xy$ und berechne $\int_B f\,d(x,y)$

Es gilt:

$$\int_B xy\,d(x,y) = \int_0^a \left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} xy\,dy \right) dx = \int_0^a \left(\frac{xy^2}{2} \Big|_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \right) dx$$

$$= \int_0^a \frac{xb^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{b^2}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4a^2}\right)\Big|_0^a = \frac{a^2b^2}{8}$$

(2) Sei $\varphi(x) = x^2$ und $\psi(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$



$\Rightarrow \varphi(-2) = \psi(-2) = 4 = \varphi(2) = \psi(2)$

Für $|x| \le 2$ ist $x^2 \le 4$.

d.h. $\psi(x) - \varphi(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2 \ge 0$.

$\Rightarrow B := N(\underbrace{[-2,2]}_{=:M}; \varphi, \psi)$ ist ein Normalbereich

über $[-2,2]$.

Flächeninhalt von B:

$$\int_B 1 \, d(x,y) \left(= \int_B \chi_B \, d(x,y) \right) = \int_{-2}^{2} \left(\int_{x^2}^{2+\frac{1}{2}x^2} 1 \, dy \right) dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left(2x - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{16}{3}.$$