Vorlesung Analysis II (25.1)

(9.10): Eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar (R-int.), wenn f fast-überall stetig ist.

(9.11): Eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist genau dann R-int., wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; Z \in \mathfrak{Z}(Q)$:

$$0 \leq \overline{\Sigma}(f, Z) - \underline{\Sigma}(f, Z) < \varepsilon .$$

(9.12): Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $f : M \to \mathbb{R}$ beschränkt.
Dann ist

$$M_\varepsilon := \{ x \in M \mid \omega(f, x) := \lim_{\delta \downarrow 0} \omega_\delta(f, x) \geq \varepsilon \}$$

abgeschlossen.

<u>Beweis von (9.10):</u> Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und

$$N := \{ x \in Q \mid f \text{ ist nicht stetig in } x \}$$

(1) Sei N eine Nullmenge, d.h. f ist fast überall stetig.
Zeige: f erfüllt (9.11)
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Betrachte

$$N_\varepsilon := \{ x \in N \mid \omega(f, x) \geq \varepsilon \} = \{ x \in Q \mid \omega(f, x) \geq \varepsilon \} \subseteq N$$

$\Rightarrow N_\varepsilon$ ist eine Nullmenge.

$(9.12) \Rightarrow N_\varepsilon$ ist abgeschlossen $\underset{\substack{N_\varepsilon \subset Q \\ Q \text{ kompakt}}}{\Rightarrow}$ N_ε kompakt.

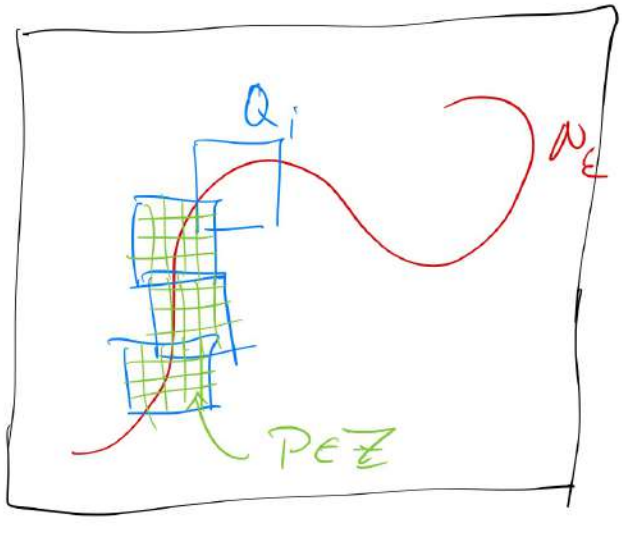
Sei $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener (!) Quader, die N_ε überdecken und $\sum_{i=1}^\infty \operatorname{vol}(Q_i) < \varepsilon$.

N_ε kompakt $\Rightarrow$ Wähle $\{Q_{i_1}, \dots, Q_{i_N}\}$ endliche Teilüberdeckung

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^N \operatorname{vol}(Q_{i_j}) < \varepsilon \quad (\text{o.E. } i_1 = 1, \dots, i_N = N)$$

o.E. ist jeder Quader $Q_i = (a_1^i, b_1^i) \times \dots \times (a_n^i, b_n^i)$, mit $a_k^i, b_k^i \in \mathbb{Q}$ $(i = 1, \dots, N)$

Wähle $q =$ kgV (Nenner von a_k^i, b_k^i $(k = 1, \dots, n, i = 1, \dots, N)$)



Q

Betrachte die Zerlegung Z von Q mit

$$Z := \{ \underbrace{\left[\tfrac{p_1}{q}, \tfrac{p_1+1}{q}\right] \times \dots \times \left[\tfrac{p_n}{q}, \tfrac{p_n+1}{q}\right]}_{=:P} \mid p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z} \}$$

$\Rightarrow$ Jeder Quader $\overline{Q_i}$ ist eine Vereinigung von Quadern aus Z.

Definiere $Z_1 := \{ P \in Z \mid P \subseteq \overline{Q_i}$ für ein $i = 1, \dots, N \}$.

$Z_2 := Z \setminus Z_1$.

Für $C := \sup\{|f(x)| \mid x \in Q\}$ gilt:

$$\sup\{|f(x) - f(x')| \mid x, x' \in Q\} \le 2C$$

und somit

$$\sum_{P \in Z_1} \sup\{|f(x) - f(x')| \mid x, x' \in P\} \operatorname{vol}_n(P) \le 2C \sum_{j=1}^{N} \operatorname{vol}_n(\overline{Q_j}) \le 2C \cdot \varepsilon$$

$$\Rightarrow \overline{\Sigma}(f, Z_1) - \underline{\Sigma}(f, Z_1) \le 2C\varepsilon$$

Sei $P \in Z_2$, d.h. $\omega(f, x) < \varepsilon$ für alle $x \in P$.

Zu $x \in P$ wähle $\delta(x) > 0$, s.d. $\sup\{|f(y) - f(z)| \mid y, z \in B_{\delta(x)}(x)\} < \varepsilon$

und offene Quader Q_x mit $x \in Q_x$ und $\overline{Q_x} \subseteq B_{\delta(x)}(x)$

$\Rightarrow \{Q_x\}_{x \in P}$ ist offene Überdeckung von P.

$\underset{P \text{ kpt.}}{\Rightarrow}$ Wähle $x_1, \dots, x_N$, s.d. $P \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{N} Q_{x_\ell}$

Wie vorher existiert eine Zerlegung Z_P von P, s.d. für alle $R \in Z_P$ ein $\ell = 1, \dots, N$ existiert mit $R \subseteq Q_{x_\ell}$

$$\Rightarrow \overline{\Sigma}(f|_P, Z_P) - \underline{\Sigma}(f|_P, Z_P) \le \varepsilon \cdot \operatorname{vol}(P)$$

Die Vereinigung $\tilde{Z} := Z_1 \cup \bigcup_{P \in Z_2} Z_P$ ist eine Zerlegung von Q.

mit $\overline{\Sigma}(f, \tilde{Z}) - \underline{\Sigma}(f, \tilde{Z}) \le 2C \cdot \varepsilon + \varepsilon \sum_{P \in Z_2} \operatorname{vol}_n(P)$

$$\leq 2C \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \mathrm{vol}(Q)$$
$$\to 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

$\overset{(9.11)}{\Longrightarrow}$ f ist R-int.

(2) Sei nun f R-int.

Es gilt: $N = \{x \in Q \mid \omega(f,x) > 0\}$
$= N_1 \cup N_{1/2} \cup \ldots$

Zeige: $N_{1/k}$ ist eine Nullmenge für alle $k \in \mathbb{N}$

$\underset{(9.8)}{\Longrightarrow}$ N ist eine Nullmenge

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. (5.11): $\exists Z \in \mathcal{Z}(Q)$ mit
$$\overline{\Sigma}(f,Z) - \underline{\Sigma}(f,Z) < \varepsilon/k$$

Sei $\mathcal{P} := \{P \in Z \mid P \cap N_{1/k} \neq \emptyset\}$

$\Rightarrow$ $N_{1/k} \subseteq \bigcup_{P \in \mathcal{P}} P$ und $\sup\{|f(x) - f(x')| \mid x, x' \in P\} > \frac{1}{k}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \sum_{\mathcal{P}} \mathrm{vol}_n(P) \leq \sum_{\mathcal{P}} \sup\{|f(x) - f(x')| \mid x,x' \in P\} \, \mathrm{vol}_n(P)$$
$$\leq \sum_{P \in Z} \sup\{|f(x) - f(x')| \mid x,x' \in P\} \, \mathrm{vol}_n(P)$$
$$\leq \overline{\Sigma}(f,Z) - \underline{\Sigma}(f,Z) \leq \frac{\varepsilon}{k}$$

$\Rightarrow \sum_{\mathcal{P}} \mathrm{vol}_n(P) \leq \varepsilon$. D.h. $N_{1/k}$ ist eine <u>Nullmenge</u>.

(9.13) **Satz** Sind $f, g: Q \to \mathbb{R}$ R-int. und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gilt:

(1) $\alpha f + \beta g$ ist R-int. mit

$$\int_Q (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_Q f(x)\,dx + \beta \int_Q g(x)\,dx.$$

"Linearität"

(2) Ist $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in Q \Rightarrow \int_Q f(x)\,dx \leq \int_Q g(x)\,dx$

"Monotonie"

(3) $|f|$ ist R-int. mit

$$\left| \int_Q f(x)\,dx \right| \leq \int_Q |f(x)|\,dx$$

(4) Jede stetige Funktion auf Q ist R-int.

Beweis: (1) + (2) klar nach Definition.

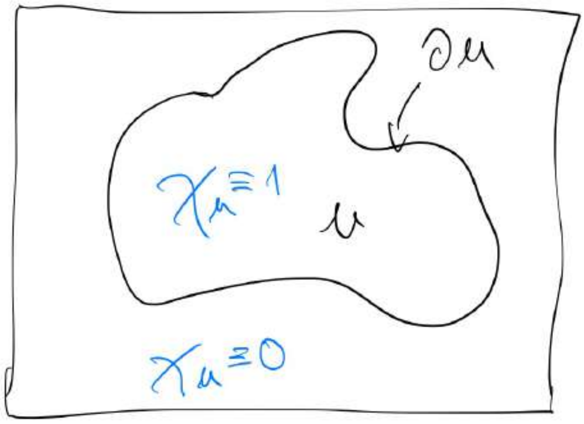
(3): f R-int. $\underset{9.10}{\Rightarrow}$ f ist fast-überall stetig.

$\Rightarrow |f|$ ist fast überall stetig $\underset{(9.10)}{\Rightarrow}$ $|f|$ R-int.

(4) f stetig $\Rightarrow \{x \in Q \mid \omega(f, x) > 0\} = \emptyset$ Nullmenge

$\underset{(9.10)}{\Rightarrow}$ f ist R-int.

(9.14) Satz Sei Q ein Quader und $M \subseteq Q$.
Die charakteristische Funktion χ_M von M,
d.h. $\chi_M(x) := \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$, ist genau
dann R-int., wenn $\partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M}$ eine Nullmenge ist.



Beweis: ∂M = Menge der Unstetigkeitsstellen von χ_M.

Bezeichnung: $M \subseteq Q$ heißt Jordan-messbar (J-messbar),
falls ∂M eine Nullmenge ist.

$$\mathrm{vol}_n(M) := \int_Q \chi_M(x)\,dx$$

wird als n-dim. Volumen von M bezeichnet.

(9.15) Definition: Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $M \subseteq Q$
J-messbar. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt (über M)
Riemann-integrierbar, falls die Fortsetzung $\hat{f} : Q \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$$ Riemann-int. ist.

Man setzt

$$\int_M f(x)\,dx := \int_Q \hat{f}(x)\,dx$$

Bemerkung: Die Definition ist unabhängig von Quader Q mit $M \subseteq Q$.

(9.16) Satz: Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $M \subseteq Q$ J-messbar. Ist $f : Q \to \mathbb{R}$ R-int., so ist auch $f|_M$ über M R-int.

Beweis: Sei $N \subseteq Q$ eine Nullmenge, s.d. f auf $Q \setminus N$ stetig ist.

$\Rightarrow$ $S := \partial M \cup N$ ist eine Nullmenge und

$$Q \setminus S = (\mathring{M} \setminus N) \cup ((Q \setminus \overline{M}) \setminus N)$$

Sei $g := \left(\widehat{f|_M}\right)\Big|_Q$

$\Rightarrow$ $g \equiv f$ auf $\mathring{M}$ und $g \equiv 0$ auf $(Q \setminus \overline{M}) \setminus N$.

$\Rightarrow$ g ist stetig auf $Q \setminus S$ $\underset{(9.10)}{\Rightarrow}$ g ist Riem.-int.