

Übungen zur Analysis II

Blatt 12

Aufgabe 1

(a) Sei $f: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass der Graph von f

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^{n-1}\} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$$

eine Nullmenge von \mathbb{R}^n ist

(b) Folgern Sie, dass für $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Menge

$$v^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w \rangle = 0\}$$

eine Nullmenge im \mathbb{R}^n ist.

Aufgabe 2 Sei Q ein Quader in \mathbb{R}^n . Der *Schwerpunkt* des Quaders Q ist definiert als der Punkt

$$\frac{1}{\text{vol}_n(Q)} \left(\int_Q x_1 dx_1 \dots dx_n, \dots, \int_Q x_n dx_1 \dots dx_n \right).$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt für den Quader $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

Aufgabe 3 Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $\omega(f, x) < \varepsilon$ für alle $x \in Q$. Zeigen Sie: Dann existiert eine Zerlegung Z von Q , so dass gilt:

$$\overline{\Sigma}(f, Z) - \underline{\Sigma}(f, Z) < \varepsilon \text{vol}_n(Q).$$

Abgabe bis 16 Uhr Freitag, 26. Januar 2024 auf der Moodle-Seite.