

Anwesenheitsübungen zur Analysis II

Blatt 12

Aufgabe 1 Berechnen Sie das Integral

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} \sin(x+y) dx dy.$$

Aufgabe 2 Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar im Sinne von Kapitel 2 der Vorlesung mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Zeigen Sie, dass das Integral der charakteristischen Funktion

$$\chi_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 1, & (x, y) \in A \\ 0, & (x, y) \notin A \end{cases}$$

für $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], y \in [0, f(x)]\}$ gleich dem Integral von f ist, d.h. es existiert ein Quader $Q \subset \mathbb{R}^2$ mit $A \subset Q$ und

$$\int_Q \chi_A dx dy = \int_0^1 f(x) dx.$$

Das Integral auf der linken Seite $\int_Q \chi_A dx dy$ wird als *Fläche von A* interpretiert. Warum macht das Sinn?