Dr. Stefan Suhr Wintersemester 2023/24

Übungen zur Analysis II

Blatt 11

Aufgabe 1 Zeigen Sie, daß durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 - y\cos(uv) + z^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 &= 2 \\ xy - \sin u \cos v + z &= 0 \end{aligned}$$

die Werte von x, y, z lokal um $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (1, 1, 0, \pi/2, 0) \in \mathbb{R}^5$ als Funktionen $x = \varphi_1(u, v)$, $y = \varphi_2(u, v)$, $z = \varphi_3(u, v)$ von u und v eindeutig bestimmt sind, und berechnen Sie

$$D_1\varphi_1(\pi/2, 0) \quad \text{und} \quad D_2\varphi_1(\pi/2, 0).$$

Aufgabe 2 Sei $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^4 + z^4 = 3\}$ und $p = (1, 1, 1) \in M$. Zeigen Sie, daß M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Geben Sie den Tangentialraum TM_p an (in Form einer linearen Gleichung).

Aufgabe 3 Zeigen Sie, daß die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^4 + y^4 - 4xy - 9$ eine Untermannigfaltigkeit M von $\mathbb{R}^2$ bilden. Bestimmen Sie die Punkte auf M, die den kleinsten und größten (euklidischen) Abstand vom Nullpunkt haben.

Anleitung: Nutzen Sie die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren. Eliminieren Sie den Lagrangeschen Multiplikator. Kombinieren Sie die entstehende Gleichung mit $f(x, y) = 0$.

Abgabe bis 16 Uhr Freitag, 19. Januar 2024 auf der Moodle-Seite.