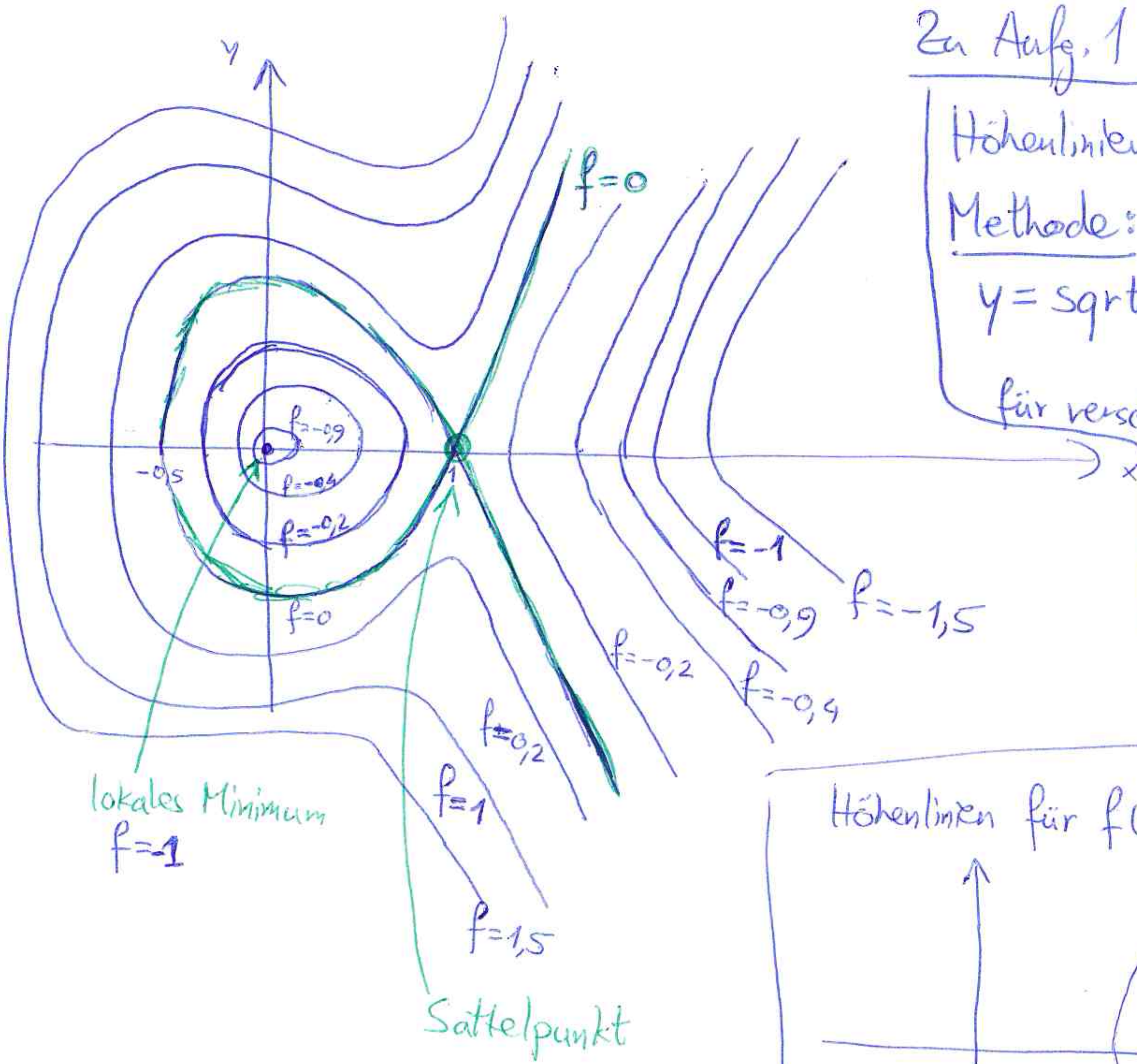
Zu Aufg. 1

Höhenlinien zeichnen.

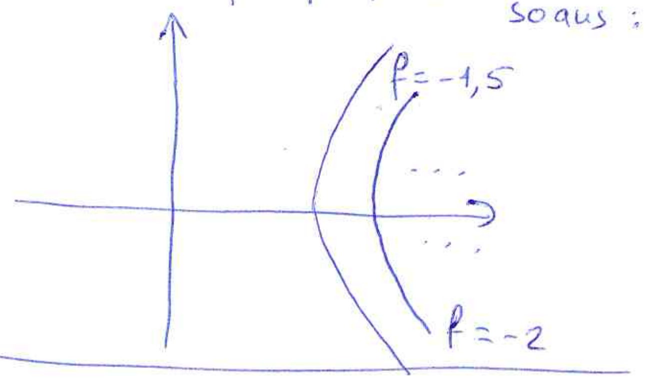
Methode:

$y = \mathrm{sqrt}(((2x+1)(x-1)^{\wedge}2 + c)$

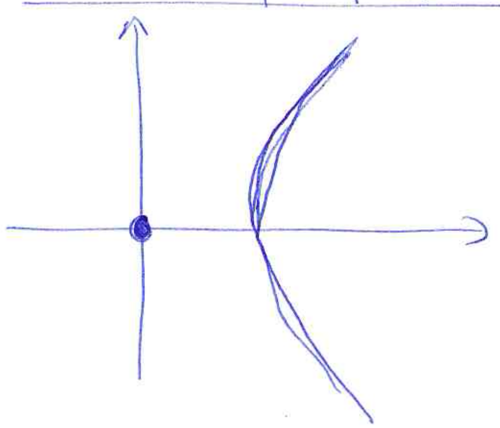
für verschiedene Werte von c bei Wolfram-Alpha eingeben.



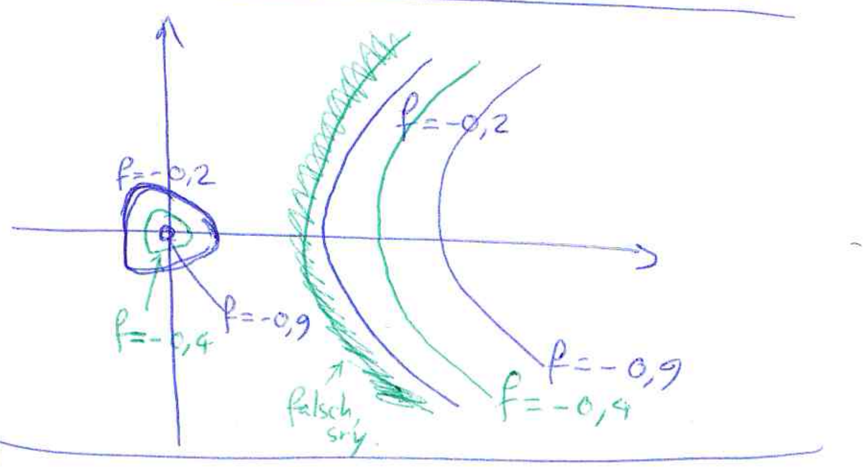
Höhenlinien für $f(x,y) < -1$ sehen so aus:



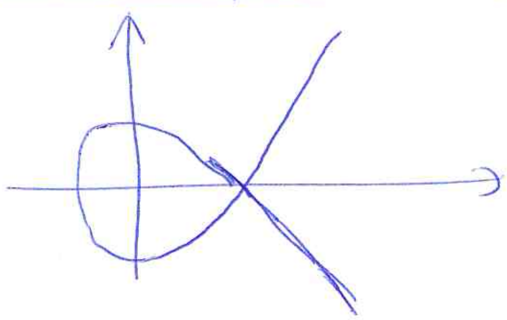
Höhenlinien für $f(x,y) = -1$



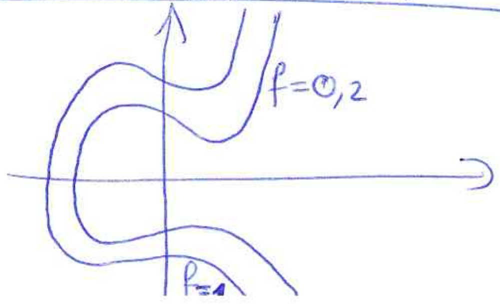
Höhenlinien für $f(x,y)$ zwischen -1 und 0



Höhenlinien für $f(x,y) = 0$



Höhenlinien für $f(x,y) > 0$



Zu Aufgabe 2:

In der Übung: Bedingung für $\nabla\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_4 \\ -x_3 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ ist $\nabla\varphi \perp S^3$,

notwendige Bed. für x lok. Maximum/Minimum.

was sich schreiben lässt als $\nabla\varphi \parallel \nabla g$,

$g(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, denn $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid g(x) = 1\}$.

$\nabla g(x) = 2x = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

Aus der Bedingung $\nabla\varphi(x) = \lambda \cdot \nabla g(x)$

ergeben sich die Bedingungen

Fall 1: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 = x$

Fall 2: $(x_1, x_2, -x_2, x_1) = x \rightsquigarrow$

Fall 3: $(x_1, x_2, x_2, -x_1) = x \rightsquigarrow$

$x \in S^3$, deshalb $2(x_1^2 + x_2^2) = 1$.

Ergänzungen / restliche Rechnung:

Fall 1 fällt raus, da $0 \notin S^3$.

Bei Fall 2 und Fall 3:

Fall 2:

$x = (x_1, x_2, -x_2, x_1)$

$\Longrightarrow \varphi(x) = x_1^2 + x_2^2 \underset{\substack{\uparrow \\ 2(x_1^2+x_2^2)=1}}{=} \frac{1}{2}$

Fall 3:

$x = (x_1, x_2, x_2, -x_1)$

$\Longrightarrow \varphi(x) = -x_1^2 - x_2^2 \underset{\substack{\uparrow \\ 2(x_1^2+x_2^2)}}{=} -\frac{1}{2}$.

Vermutung daher: Alle Punkte aus Fall 2 sind globale Maxima, Alle Punkte aus Fall 3 sind globale Minima.

Wenn man es schafft zu zeigen, dass $-\frac{1}{2} \le \varphi(x) \le \frac{1}{2}$, dann ist die Vermutung