Übungen zur Analysis II

Blatt 10

Aufgabe 1 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(a) Bestimmen Sie alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen $Df(x,y)$ invertierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ kein Diffeomorphismus ist.

(c) Sei $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y > 0\}$. Bestimmen Sie die Bildmenge $V = f(U)$ und berechnen Sie die inverse Abbildung $(f|_U)^{-1}\colon V \to U$.

Aufgabe 2 Sei $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und es existiere ein $C > 0$, so dass $\|Dg(x)\| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie, dass $f = \mathrm{id} + \varepsilon g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ein Diffeomorphismus ist.

Hinweis: Das Bild von f ist vollständig und damit abgeschlossen.

Aufgabe 3 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Es existiere eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $x, y \in U$ die Abschätzung

$$\|f(y) - f(x)\| \geq c\|y - x\|$$

gilt.

Zeigen Sie:

(a) Für alle $x \in U$ ist $\det Df(x) \neq 0$.

(b) f ist ein C^1-Diffeomorphismus von U auf $f(U)$.

*(c) Ist $U = \mathbb{R}^n$, so ist $f(U) = \mathbb{R}^n$. *Hinweis:* Zeigen Sie, daß $f(\mathbb{R}^n)$ sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

Abgabe bis 16 Uhr Freitag, 12. Januar 2024 auf der Moodle-Seite.