Übungen zur Analysis II

Blatt 9

Aufgabe 1 Im $\mathbb{R}^n$ seien k Punkte $p_1, \ldots, p_k$ gegeben. Zeigen Sie, daß es genau einen Punkt gibt, für den

$$f(x) := \|x - p_1\|^2 + \cdots + \|x - p_k\|^2$$

minimal wird, und bestimmen Sie diesen Punkt.

Aufgabe 2 Die Materialkosten für eine Kiste ohne Deckel seien proportional zur Oberfläche plus der Summe der Kantenlängen, also durch

$$f(x, y, z) := xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 4z$$

mit den Kantenlängen x, y, z gegeben. Welche Maße besitzt die billigste Kiste mit Volumen $xyz = 1/2$?

Anleitung: Schreiben Sie die Kosten als Funktion $\tilde{f}$ von x und y, indem Sie die Bedingung „$xyz = 1/2$“ nach z auflösen und das Ergebnis in f einsetzen. Zeigen Sie: $\tilde{f}$ besitzt ein absolutes Minimimum, und für jeden kritischen Punkt von $\tilde{f}$ gilt $x = y$.

Untersuchen Sie dann die Funktion $\hat{f}\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = \tilde{f}(x, x)$. Zeigen Sie: $\hat{f}$ ist strikt konvex. Raten Sie die Nullstelle von $\hat{f}'$.

Aufgabe 3 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u \in C^0(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ mit

$$\triangle u = \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii}^2 u \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

Zeigen Sie, dass u sein Maximum auf dem Rand annimmt, d.h. $\max_\Omega u = \max_{\partial\Omega} u$.

Hinweis: Nehmen Sie zuerst $\triangle u > 0$ an. Betrachten Sie anschliessend $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon\|x\|^2$.

Abgabe bis 16 Uhr Freitag, 15. Dezember 2023 auf der Moodle-Seite.