Dr. Stefan Suhr Wintersemester 2023/24

Übungen zur Analysis II

Blatt 8

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

überall differenzierbar ist.

Aufgabe 2

Betrachten Sie auf $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ das „Vektorfeld" $F\colon U \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = \big(F_1(x,y), F_2(x,y)\big) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

1. Zeigen Sie: Für alle $p \in U$ und alle $i,j \in \{1,2\}$ gilt $D_iF_j(p) = D_jF_i(p)$.
2. Berechnen Sie das Integral
$$\int_0^{2\pi} \Big\langle F\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t)\Big\rangle\, dt$$
für die Kurve $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.
3. Zeigen Sie: Es existiert keine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f = F$.

Aufgabe 3 Sei $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ stetig, $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\big)$. Man definiert

$$\int_a^b f(x)\,dx := \left(\int_a^b f_1(x)\,dx, \ldots, \int_a^b f_m(x)\,dx\right) \in \mathbb{R}^m.$$

Sei $\|.\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

$$\left\|\int_a^b f(x)\,dx\right\| \leq \int_a^b \big\|f(x)\big\|\,dx$$

Hinweis: Zeigen Sie diese Aussage zunächst für Treppenfunktionen.

Abgabe bis 16 Uhr Freitag, 8. Dezember 2023 auf der Moodle-Seite.