Dr. Stefan Suhr Wintersemester 2023/24

Anwesenheitsübungen zur Analysis II

Blatt 8

Aufgabe 1 Sei $b\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ eine bilineare Abbildung (d. h., für jeden Vektor $z \in \mathbb{R}^l$ ist die Abbildung $v \mapsto B(v, z)$ linear, und für jeden Vektor $y \in \mathbb{R}^k$ ist die Abbildung $w \mapsto B(y, w)$ linear).

1. Zeigen Sie: Für alle $y, v \in \mathbb{R}^k$ und alle $z, w \in \mathbb{R}^l$ gilt:

$$Db(y, z)(v, w) = B(v, z) + B(y, w).$$

2. Seien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ und $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ differenzierbar und $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $h(x) = b\big(f(x), g(x)\big)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel:

$$Dh(x)u = b\big(Df(x)u, g(x)\big) + b\big(f(x), Dg(x)u\big)$$

3. Zeigen Sie: Für $k = l = m = 1$ und $b(y, z) = y \cdot z$ ist das die Produktregel.

Aufgabe 2 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar, und es gelte $D_x f(x, y) = D_y f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß dann eine differenzierbare Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert mit $f(x, y) = \varphi(x + y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.