Dr. Stefan Suhr Wintersemester 2023/24

Übungen zur Analysis II

Blatt 7

Aufgabe 1 Gegeben seien die Abbildungen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (e^t, \sin t, t^2)$, und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_1 + x_3)$.

1. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen $Df(t)$ und $Dg(x)$ und bilden Sie das Matrizenprodukt $Dg\big(f(t)\big) \cdot Df(t)$.
2. Berechnen Sie die Verkettung $h := g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und deren Jacobi-Matrix.

Aufgabe 2 Unter der *Niveaumenge* einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zum Wert $c \in \mathbb{R}$ versteht man die Menge $f^{-1}(c) := \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) = c\}$.

Skizzieren Sie die Niveaumengen von $f(x_1, x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2$ und $g(x_1, x_2) = {x_1}^2 - {x_2}^2$ für $c = -2, -1, 0, 1, 2$ und veranschaulichen Sie sich die Vektorfelder grad f und grad g.

Aufgabe 3 Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(r, \varphi, \theta) = (r \cos\varphi \sin\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r\cos\theta)$.

1. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von F und ihre Determinante.
2. Berechnen Sie zum Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ alle Tripel $(r, \varphi, \theta) \in [0, \infty[\times \mathbb{R} \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^3$, für die $F(r, \varphi, \theta) = (x, y, z)$ ist.

   Zeichnen Sie ein Bild, in dem der Punkt (x, y, z) und die Größen r, φ und θ dargestellt sind.

Abgabe bis 16 Uhr Freitag, 1. Dezember 2023 auf der Moodle-Seite.