Dr. Stefan Suhr Wintersemester 2023/24

Übungen zur Analysis II

Blatt 5

Aufgabe 1 Seien $(U, \|.\|_U)$, $(V, \|.\|_V)$ und $(W, \|.\|_W)$ normierte Vektorräume. Zeigen Sie:

1. Sind $f\colon D \subset U \to V$ und $g\colon E \subset V \to W$ stetig mit $f(D) \subset E$, so ist auch $g \circ f\colon D \to W$ stetig.
2. Sind $f, g\colon D \subset U \to V$ stetig und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so ist auch $\lambda f + \mu g\colon D \to V$ stetig.

Aufgabe 2 Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum, $W \subset V$ ein Untervektorraum, und sei $L\colon W \to \mathbb{R}$ linear und stetig.

Zeigen Sie: Es existiert genau eine stetige lineare Abbildung $\overline{L}\colon \overline{W} \to \mathbb{R}$ mit $\overline{L}|_W = L$.

Verdeutlichen Sie sich die Aussage am Beispiel $V = C^0([a, b])$ und $\|.\| = \|.\|_\infty$.

Aufgabe 3 Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $d(x, A) := \inf\{\|x - z\| \mid z \in A\}$. Zeigen Sie:

1. Zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ existiert ein $y \in A$ mit $\|x - y\| = d(x, A)$.
2. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$ (d. h., die Funktion $x \mapsto d(x, A)$ ist Lipschitz-stetig mit der Lipschitzkonstanten 1.
3. Ist $y \in A$ durch die Bedingung „$\|x - y\| = d(x, A)$“ eindeutig bestimmt?

Abgabe bis 16 Uhr Freitag, 17. November 2023 auf der Moodle-Seite.