Dr. Stefan Suhr Wintersemester 2023/24

Anwesenheitsübungen zur Analysis II

Blatt 3

Aufgabe 1 Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und die Funktionen $g,\ h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar. Zeigen Sie, daß die Funktion $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$G(x) := \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt,$$

differenzierbar ist und drücken Sie die Ableitung $G'(x)$ durch die gegebenen Funktionen aus.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie für $0 < a < b$ und $c \in \mathbb{R}$ die Integrale

$$\int_a^b x^{c-1}\,dx, \qquad \int_a^b \frac{1}{c^2 + x^2}\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_a^b e^{cx}\,dx,$$

indem Sie Stammfunktionen suchen. Unterscheiden Sie die Fälle $c = 0$ und $c \neq 0$.

A1 f stetig $\Rightarrow \exists F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff'bar mit $F' = f$

$$\Rightarrow G(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_{g(x)}^{h(x)}$$

$$= F(h(x)) - F(g(x))$$

$\Rightarrow$ G diff'bar als Komposition diff'barer Funktionen.

Für die Ableitung gilt nach der Kettenregel:

$$G' = (F' \circ h)h' - (F' \circ g)g' = (f \circ h)h' - (f \circ g)g'$$

A2

<u>$c = 0$:</u>

$$\int_a^b x^{-1}\,dx = [\ln x]_a^b = \ln b - \ln a$$

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = -\frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

$$\int_a^b 1\,dx = [x]_a^b = b - a$$

<u>$c \neq 0$</u>

$$\int_a^b x^{c-1}\,dx = \left[\frac{1}{c}x^c\right]_a^b = \frac{b^c}{c} - \frac{a^c}{c}$$

$$\int_a^b \frac{1}{c^2+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{c}\tan^{-1}\left(\frac{x}{c}\right)\right]_a^b$$

$$\int_a^b e^{cx}\,dx = \left[\frac{1}{c}e^{cx}\right]_a^b$$