Handreichung zur Aufgabe „Verkehrstote in Bochum (ML-Schätzer)“

Titel der Aufgabe:	Verkehrstote in Bochum (ML-Schätzer)
Screenshot der anfänglichen Aufgabe:	Wir wollen die jährliche Anzahl der Verkehrstoten in Bochum analysieren. Es liegen uns Daten $x_1, \ldots, x_{12}$ aus zwölf aufeinanderfolgenden Jahren vor, die wir als Realisierungen unabhängiger Poisson(λ)-verteilter Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{12}$ auffassen, wobei der Parameter $\lambda > 0$ unbekannt ist. **(a)** Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für λ. Sie können dabei zum Beispiel x_1 als `x1` und x_{12} als `x12` eingeben. Eine Eingabe von Summenzeichen ist in dieser Aufgabe nicht möglich. $\hat{\lambda}_{ML} =$
Autoren:	Daniel Meißner und Herold Dehling, Ruhr-Universität Bochum
Lizenz:	CC BY-SA 4.0
Zielgruppe:	Studierende der Mathematik und in Serviceveranstaltungen
Thema:	Statistik
Tags:	Stochastik, Statistik, Maximum-Likelihood-Schätzer, Konfidenzintervall
Randomisierung:	nein
Aufgabentyp:	tutorielle Aufgabe[1]
Beschreibung:	In dieser Aufgabe wird die jährliche Anzahl der Verkehrstoten in der Stadt Bochum als Realisierung einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen modelliert. Aus Daten von 12 aufeinanderfolgenden Jahren soll der Maximum-Likelihood Schätzer sowie ein Konfidenzintervall für den unbekannten Parameter der Poisson-Verteilung bestimmt werden. Die Studierenden werden schrittweise an die Berechnung des ML-Schätzers herangeführt.
Didaktische Überlegungen:	Die Studierenden lernen, Daten aus dem Alltag (Anzahl der Verkehrstoten in aufeinanderfolgenden Jahren) mathematisch-statistisch zu modellieren und Schätzer sowie Konfidenzintervalle für den unbekannten Parameter einer Verteilung zu bestimmen. Sie üben insbesondere die Bestimmung eines Maximum-Likehood Schätzers und erlangen damit Sicherheit im Umgang mit der ML-Methode. Weiter üben die Studierenden die Berechnung von Kennzahlen der Schätzer und die Bestimmung eines approximativen Konfidenzintervalls mittels der Regel *Schätzwert +/- zweimal geschätzte Standardabweichung des Schätzers* und erlangen so Vertrautheit mit diesen für Anwendungen wichtigen Verfahren.
Enthaltene Fremdmaterialien:	keine
Daten oder Links (evtl. aktualisieren):	keine

Lizenz: „Handreichung zur Aufgabe ‚Verkehrstote in Bochum (ML-Schätzer)‘“ wurde entwickelt von Daniel Meißner an der Ruhr-Universität Bochum. Dieses Werk ist lizenziert unter der Lizenz „Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“: http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/.

[1] Eine *tutorielle Aufgabe* ist eine digitale Aufgabe, die im Falle einer fehlerhaften Antwort in kleinere und einfachere Teilaufgaben unterteilt wird. Nach der Bearbeitung dieser Teilaufgaben werden die Lernenden zur erneuten Bearbeitung der ursprünglichen Aufgabe aufgefordert.

Screenshots aus der Aufgabe

Aufgabe – Maximum-Likelihood-Schätzer angeben:

Wir wollen die jährliche Anzahl der Verkehrstoten in Bochum analysieren. Es liegen uns Daten $x_1, \dots, x_{12}$ aus zwölf aufeinanderfolgenden Jahren vor, die wir als Realisierungen unabhängiger Poisson(λ)-verteilter Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{12}$ auffassen, wobei der Parameter $\lambda > 0$ unbekannt ist.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für λ. Sie können dabei zum Beispiel x_1 als `x1` und x_{12} als `x12` eingeben. Eine Eingabe von Summenzeichen ist in dieser Aufgabe nicht möglich.

$\hat{\lambda}_{ML} =$ [ ]

i.) Zwischenschritt – Likelihood-Funktion auswählen:

(a.1) Wählen Sie die passende Likelihood-Funktion für den Parameter λ aus.

- ○ $L(\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}$
- ○ $L(\lambda) = e^{-12\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{12} x_i}}{\prod_{i=1}^{12} x_i!}$
- ○ $L(\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

ii.) Zwischenschritt – Loglikelihood-Funktion auswählen:

(a.2) Wählen Sie die passende Loglikelihood-Funktion für den Parameter λ aus.

- ○ $l(\lambda) = -12\lambda + \sum_{i=1}^{12} x_i \ln(\lambda) - \sum_{i=1}^{12} \ln(x_i!)$
- ○ $l(\lambda) = -\lambda + x_1 \ln(\lambda) - \ln(x_1!)$
- ○ $l(\lambda) = 12\lambda - \sum_{i=1}^{12} x_i \ln(\lambda) + \sum_{i=1}^{12} \ln(x_i!)$

iii.) Zwischenschritt – Ableitung der Loglikelihood-Funktion auswählen:

(a.3) Wählen Sie die korrekte Ableitung der Loglikelihood-Funktion aus.

- ○ $l'(\lambda) = -12 + \sum_{i=1}^{12} x_i \frac{1}{\lambda}$
- ○ $l'(\lambda) = 12 - \sum_{i=1}^{12} \frac{1}{x_i!}$
- ○ $l'(\lambda) = -1 + x_1 \frac{1}{\lambda}$

Aufgabe – Varianz des ML-Schätzers angeben:

(b) Bestimmen Sie eine Formel für die Varianz des Maximum-Likelihood Schätzers $\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_{ML})$. Sie können λ als `lambda` eingeben.

$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_{ML}) =$ [ ]

Aufgabe – Varianz und Standardabweichung des ML-Schätzers schätzen:

(c) Schätzen Sie die Varianz und die Standardabweichung des Maximum-Likelihood-Schätzers und geben Sie das Ergebnis auf mindestens drei Nachkommastellen genau an.

$\hat{\sigma}^2_{\hat{\lambda}_{ML}} =$ [ ]

$\hat{\sigma}_{\hat{\lambda}_{ML}} =$ [ ]

Aufgabe – Approximatives Konfidenzintervall angeben:

(d) Geben Sie mithilfe der Faustregel „Schätzwert ± 2 × geschätzte Standardabweichung des Schätzers" ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für den unbekannten Parameter λ an.

[ ]

Aufgabe – Bedeutung des Konfidenzintervalls einordnen:

(e) Welche der folgenden Aussagen trifft auf das von Ihnen bestimmte Konfidenzintervall zu?

- ○ Wir können mit 100% Sicherheit sagen, dass der wahre Parameterwert λ im angegebenen Intervall liegt.
- ○ Wenn wir die oben genannte Faustregel anwenden, machen wir in ca. 95% aller Fälle eine korrekte Aussage
- ○ Die Zahl der Verkehrstoten im kommenden Jahr wird zwischen 3 und 6 liegen.