

Handreichung zur Aufgabe „Test auf einen fairen Würfel“

Titel der Aufgabe: Test auf einen fairen Würfel

Screenshot der anfänglichen Aufgabe:

Ein Würfel wird 595 Mal gewürfelt. In der untenstehenden Tabelle haben wir notiert, wie oft jede der Augenzahlen 1, . . . , 6 auftrat.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl	90	115	115	90	100	85

Wir wollen die Hypothese testen, dass der Würfel fair ist gegen die Alternative, dass er unfair ist. („Fair“ heißt, dass alle Augenzahlen mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten.)

a) Wählen Sie die passende Teststatistik aus.

$T = \frac{(n-1) \cdot s_X^2}{\sigma_0^2}$

$F = \frac{s_Y^2}{s_X^2}$

$T = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}) \cdot s_P^2}}$

$X = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - \theta_i^{(0)} \cdot n)^2}{\theta_i^{(0)} \cdot n}$

$T = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sqrt{n \cdot s_X^2}}$

a) Wählen Sie die passende Teststatistik aus.

b) Bestimmen Sie den Wert der Teststatistik.

c) Es soll zum Niveau $\alpha = 0.05$ getestet werden. Bestimmen Sie den kritischen Wert für Ihren Test.

d) Wie lautet Ihre Testentscheidung?

e) Was bedeutet es in der Situation dieser Aufgabe, dass der Test zum Niveau 0.05 durchgeführt wird?

Autoren: Daniel Meißner und Herold Dehling, Ruhr-Universität Bochum

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Zielgruppe: Studierende der Mathematik und in Serviceveranstaltungen

Thema: Statistik

Tags: Stochastik, Statistik, Hypothesentests, Chi-Quadrat-Test

Randomisierung: ja


Aufgabentyp: tutorielle Aufgabe¹

Beschreibung: Den Studierenden wird ein Datensatz eines Würfelxperiments präsentiert. Mithilfe eines geeigneten statistischen Tests und dieses Datensatzes sollen die Studierenden entscheiden, ob der Würfel fair ist. Die Studierenden werden schrittweise durch dieses Vorhaben geleitet. Nach Eingabe falscher Antworten besteht bei zwei der fünf Aufgabenteile die Möglichkeit, dass diese noch einmal kleinschrittiger abgefragt werden.

Didaktische Überlegungen: Die Studierenden sollen in die Lage versetzt werden, ausgehend von konkreten Daten und einer alltagssprachlich formulierten Hypothese einen geeigneten statistischen Test zu finden, das Testverfahren durchzuführen und das Ergebnis korrekt zu interpretieren. Insbesondere sollen die Studierenden in dieser Aufgabe eine typische Anwendung des Chi-Quadrat-Tests kennenlernen.

Enthaltene Fremdmaterialien: keine

Daten oder Links (evtl. aktualisieren): keine

Lizenz: „Handreichung zur Aufgabe ‚Test auf einen fairen Würfel‘“ wurde entwickelt von Daniel Meißner an der Ruhr-Universität Bochum. Dieses Werk ist lizenziert unter der Lizenz „Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>. 

¹Eine *tutorielle Aufgabe* ist eine digitale Aufgabe, die im Falle einer fehlerhaften Antwort in kleinere und einfachere Teilaufgaben unterteilt wird. Nach der Bearbeitung dieser Teilaufgaben werden die Lernenden zur erneuten Bearbeitung der ursprünglichen Aufgabe aufgefordert.

Screenshots aus der Aufgabe

Aufgabe – Teststatistik auswählen:

Ein Würfel wird 595 Mal gewürfelt. In der untenstehenden Tabelle haben wir notiert, wie oft jede der Augenzahlen 1, . . . , 6 auftrat.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl	90	115	115	90	100	85

Wir wollen die Hypothese testen, dass der Würfel fair ist gegen die Alternative, dass er unfair ist. („Fair“ heißt, dass alle Augenzahlen mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten.)

a) Wählen Sie die passende Teststatistik aus.

$T = \frac{(n-1) \cdot s_X^2}{\sigma_0^2}$
 $F = \frac{s_Y^2}{s_X^2}$
 $T = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}) \cdot s_P^2}}$
 $X = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - \theta_i^{(0)} \cdot n)^2}{\theta_i^{(0)} \cdot n}$
 $T = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)}{\sqrt{n \cdot s_X^2}}$

a) Wählen Sie die passende Teststatistik aus.
 b) Bestimmen Sie den Wert der Teststatistik.
 c) Es soll zum Niveau $\alpha = 0.05$ getestet werden. Bestimmen Sie den kritischen Wert für Ihren Test.
 d) Wie lautet Ihre Testentscheidung?
 e) Was bedeutet es in der Situation dieser Aufgabe, dass der Test zum Niveau 0.05 durchgeführt wird?

Aufgabe – Wert der Teststatistik berechnen:

b) Bestimmen Sie den Wert der Teststatistik.

$T =$

Hinweis: Wenn Sie gerundete Werte eingeben, runden Sie mindestens auf zwei Nachkommastellen genau.

i.) Zwischenschritt – Parameter angeben:

b.1) Suchen Sie die Werte für n und k aus dem Aufgabentext.

$n =$

$k =$

ii.) Zwischenschritt – Teilausdrücke der Teststatistik berechnen:

b.2) Füllen Sie die folgende Tabelle aus.

Hinweis: Sie bekommen erst Feedback zu Ihrer Antwort, wenn Sie die Tabelle vollständig ausgefüllt haben.

i	1	2	3	4	5	6
N_i	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
$n\theta_i^{(0)}$	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Aufgabe – Kritischen Wert angeben:

c) Es soll zum Niveau $\alpha = 0.05$ getestet werden. Bestimmen Sie den kritischen Wert für Ihren Test.

$k_\alpha =$

i.) Zwischenschritt – Verteilung der Teststatistik auswählen:

c.1) Welche Verteilung hat die Teststatistik unter der Nullhypothese?

- Chi-Quadrat-Verteilung
- Binomialverteilung
- Student-t-Verteilung
- Normalverteilung
- Exponentialverteilung

ii.) Zwischenschritt – Freiheitsgrade angeben:

c.2) Geben Sie die Zahl der Freiheitsgrade an:

Aufgabe – Testentscheidung treffen:

d) Wie lautet Ihre Testentscheidung:

Nicht beantwortet.

Aufgabe – Verständnisfrage zum Niveau beantworten:

e) Was bedeutet es in der Situation dieser Aufgabe, dass der Test zum Niveau 0.05 durchgeführt wird? Markieren Sie die richtigen Aussagen:

- Bei diesem Verfahren halten wir in 5.0 % der Fälle einen fairen Würfel für unfair.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass wir eine Fehlentscheidung treffen, ist höchstens 5.0 %.
- Die Wahrscheinlichkeit, einen fairen Würfel für unfair zu halten, ist höchstens 5.0 %.
- Die Wahrscheinlichkeit, einen unfairen Würfel zu entdecken, ist mindestens 95.0 %.