

Handreichung zur Aufgabe „Energieverbrauch Fernwärme“

Titel der Aufgabe: Energieverbrauch Fernwärme

Screenshot der anfänglichen Aufgabe:

Zur Bestimmung der Abhängigkeit des Energieverbrauchs von der Außentemperatur hat Professor D. an 30 Tagen den Energieverbrauch y in kWh und die morgendliche Außentemperatur x in °C notiert. Die Rohdaten lieferten folgende Werte:

$$\bar{x} = 7.5, \bar{y} = 95, s_x = 3, s_y = 20, r_{x,y} = -0.6$$

Wir fassen die Datenpunkte y_i als Realisierungen einer Zufallsvariablen $Y = \alpha + \beta x + \epsilon$ auf, wobei ϵ eine $N(0, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable ist.

Hinweis: Bitte geben Sie alle Zahlenwerte auf mindestens eine Nachkommastelle genau an.

a) Bestimmen Sie die Kleinste-Quadrate Regressionsgerade $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$.

$\hat{\alpha} =$

$\hat{\beta} =$

Autoren: Daniel Meißner und Herold Dehling, Ruhr-Universität Bochum

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Zielgruppe: Studierende der Mathematik und in Serviceveranstaltungen

Thema: Statistik

Tags: Stochastik, Statistik, Lineare Regression, Hypothesentests

Randomisierung: ja


Aufgabentyp: mehrteilige Aufgabe¹

Beschreibung: Professor D. hat den Energieverbrauch seines Hauses in Abhängigkeit der Außentemperatur gemessen. Den Studierenden werden in dieser Aufgabe die arithmetischen Mittel, die empirischen Standardabweichungen sowie der Korrelationskoeffizient für diesen Datensatz gegeben. Die Daten sollen nun mithilfe der linearen Regression untersucht werden. In sieben Aufgabenteilen sollen die Kleinste-Quadrate Regressionsgerade bestimmt werden, eine Vorhersage für den Energieverbrauch gemacht werden, eine Schätzung für die Varianz des Zufallsterms im Modell gegeben werden, 95%-Konfidenzintervalle für die Steigung, den y -Achsenabschnitt und die Varianz des Zufallsterms angegeben werden und die Hypothese, dass die Außentemperatur keinen Einfluss auf den Energieverbrauch hat, getestet werden.

Didaktische Überlegungen: Die Studierenden lernen, Daten aus dem Alltag (Energieverbrauch der Heizung in Abhängigkeit von der Außentemperatur) mithilfe eines linearen Regressionsmodells mathematisch-statistisch zu modellieren und Schätzer sowie Konfidenzintervalle für die unbekannt Parameter zu bestimmen.

Enthaltene Fremdmaterialien: keine

Daten oder Links (evtl. aktualisieren): keine

Lizenz: „Handreichung zur Aufgabe ‚Energieverbrauch Fernwärme‘“ wurde entwickelt von Daniel Meißner an der Ruhr-Universität Bochum. Dieses Werk ist lizenziert unter der Lizenz „Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>. 

¹Eine *mehrteilige Aufgabe* ist eine digitale Aufgabe, bei der die einzelnen Aufgabenteile nacheinander angezeigt werden. Es muss zunächst ein Aufgabenteil korrekt beantwortet werden, bevor man den nächsten Aufgabenteil bearbeiten kann.

Screenshots aus der Aufgabe

Aufgabe – Regressionsparameter berechnen:

Zur Bestimmung der Abhängigkeit des Energieverbrauchs von der Außentemperatur hat Professor D. an 30 Tagen den Energieverbrauch y in kWh und die morgendliche Außentemperatur x in °C notiert. Die Rohdaten lieferten folgende Werte:

$$\bar{x} = 7.5, \bar{y} = 95, s_x = 3, s_y = 20, r_{x,y} = -0.6$$

Wir fassen die Datenpunkte y_i als Realisierungen einer Zufallsvariablen $Y = \alpha + \beta x + \epsilon$ auf, wobei ϵ eine $N(0, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable ist.

Hinweis: Bitte geben Sie alle Zahlenwerte auf mindestens eine Nachkommastelle genau an.

a) Bestimmen Sie die Kleinste-Quadrate Regressionsgerade $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$.

$\hat{\alpha} =$

$\hat{\beta} =$

Aufgabe – Vorhersage berechnen:

b) Die Außentemperatur in °C beträgt $x = 8$. Machen Sie mithilfe des Modells eine Vorhersage für den Energieverbrauch y .

$\hat{y} =$

Aufgabe – Schätzung für σ^2 berechnen:

c) Geben Sie eine Schätzung für die Varianz σ^2 des Zufallsterms im linearen Regressionsmodell.

Schätzung für σ^2 :

Aufgabe – Konfidenzintervalle berechnen:

d) Bestimmen Sie nun 95%-Konfidenzintervalle für die Größen α , β und σ^2 . Sie können die Intervalle so eingeben: [a, b].

Hinweis: Bitte füllen Sie alle Felder der Tabelle aus, um Feedback zu Ihrer Lösung zu erhalten.

Konfidenzintervall für α :

Konfidenzintervall für β :

Konfidenzintervall für σ^2 :

Aufgabe – Hypothese und Alternative formulieren:

Wir wollen nun die Hypothese, dass die Außentemperatur keinen Einfluss auf den Energieverbrauch hat, gegen die Alternative testen, dass eine geringere Außentemperatur einen höheren Energieverbrauch nach sich zieht.

e) Geben Sie die Hypothese und Alternative in Formeln an.

Hypothese

Alternative

Aufgabe – Teststatistik auswählen:

f) Wählen Sie die passende Teststatistik aus.

$T = \frac{s_y}{s_x} \cdot r_{xy} \cdot \sqrt{\frac{(n-2) \cdot s_x^2}{(1-r_{xy}^2) \cdot s_y^2}}$

$F = \frac{s_Y^2}{s_X^2}$

$T = \frac{(n-1) \cdot s_X^2}{\sigma_0^2}$

$T = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)}{\sqrt{n \cdot s_X^2}}$

$T = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}) \cdot s_P^2}}$

Aufgabe – Wert der Teststatistik berechnen und Testentscheidung treffen:

Wir wollen nun die Hypothese, dass die Außentemperatur keinen Einfluss auf den Energieverbrauch hat, gegen die Alternative testen, dass eine geringere Außentemperatur einen höheren Energieverbrauch nach sich zieht.

g) Berechnen Sie den Wert der Teststatistik und treffen Sie die Testentscheidung.

Wert der Teststatistik:

Die Hypothese wird aufgrund des Werts der Teststatistik .