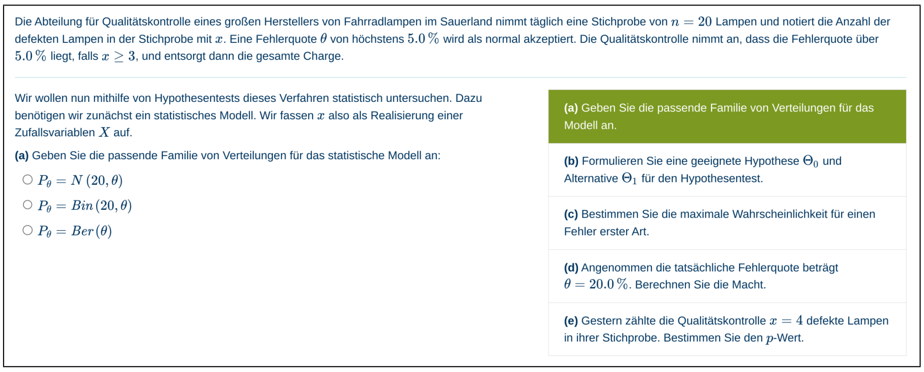
Handreichung zur Aufgabe „Qualitätskontrolle im Sauerland“

Titel der Aufgabe: Qualitätskontrolle im Sauerland

Screenshot der anfänglichen Aufgabe:



Autoren: Daniel Meißner und Herold Dehling, Ruhr-Universität Bochum

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Zielgruppe: Studierende der Mathematik und in Serviceveranstaltungen

Thema: Statistik

Tags: Stochastik, Statistik, Hypothesentests, p-Wert, Fehler 1. Art, Macht

Randomisierung: nein

Aufgabentyp: tutorielle Aufgabe[1]

Beschreibung: In dieser Aufgabe wird eine typische Fragestellung aus der Qualitätskontrolle vorgestellt. Die Studierenden untersuchen in dieser Aufgabe das Verfahren mithilfe des Binomialtests. In den fünf Aufgabenteilen werden die Studierenden nach dem statistischen Modell, nach dem Fehler 1. Art, nach der Macht und dem p-Wert gefragt. Außerdem sollen sie eine geeignete Hypothese und Alternative für das vorgestellte Verfahren formulieren.

Didaktische Überlegungen: Die Studierenden lernen in dieser Aufgabe den Binomialtest kennen. Dieser Test eignet sich in besonderer Weise dazu, den Studierenden das generelle Vorgehen bei statistischen Tests und die Begriffe *Fehler 1. Art, Fehler 2. Art, Niveau, Macht* sowie *p-Wert* zu vermitteln. Insbesondere sollen die Studierenden erkennen, dass es bei statistischen Tests um Entscheidungen unter Unsicherheit handelt und dass dabei Fehler gemacht werden können, die in der statistischen Testtheorie quantifiziert werden.

Enthaltene Fremdmaterialien: keine

Daten oder Links (evtl. aktualisieren): keine

[1] Eine *tutorielle Aufgabe* ist eine digitale Aufgabe, die im Falle einer fehlerhaften Antwort in kleinere und einfachere Teilaufgaben unterteilt wird. Nach der Bearbeitung dieser Teilaufgaben werden die Lernenden zur erneuten Bearbeitung der ursprünglichen Aufgabe aufgefordert.

Screenshots aus der Aufgabe

Aufgabe – Statistisches Modell bestimmen:

Die Abteilung für Qualitätskontrolle eines großen Herstellers von Fahrradlampen im Sauerland nimmt täglich eine Stichprobe von $n = 20$ Lampen und notiert die Anzahl der defekten Lampen in der Stichprobe mit x. Eine Fehlerquote θ von höchstens $5.0\,\%$ wird als normal akzeptiert. Die Qualitätskontrolle nimmt an, dass die Fehlerquote über $5.0\,\%$ liegt, falls $x \geq 3$, und entsorgt dann die gesamte Charge.

Wir wollen nun mithilfe von Hypothesentests dieses Verfahren statistisch untersuchen. Dazu benötigen wir zunächst ein statistisches Modell. Wir fassen x also als Realisierung einer Zufallsvariablen X auf.

(a) Geben Sie die passende Familie von Verteilungen für das statistische Modell an:

- ○ $P_\theta = N(20, \theta)$
- ○ $P_\theta = Bin(20, \theta)$
- ○ $P_\theta = Ber(\theta)$

(a) Geben Sie die passende Familie von Verteilungen für das Modell an.

(b) Formulieren Sie eine geeignete Hypothese Θ_0 und Alternative Θ_1 für den Hypothesentest.

(c) Bestimmen Sie die maximale Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art.

(d) Angenommen die tatsächliche Fehlerquote beträgt $\theta = 20.0\,\%$. Berechnen Sie die Macht.

(e) Gestern zählte die Qualitätskontrolle $x = 4$ defekte Lampen in ihrer Stichprobe. Bestimmen Sie den p-Wert.

Aufgabe – Hypothese und Alternative formulieren:

(b) Formulieren Sie eine geeignete Hypothese Θ_0 und Alternative Θ_1 für den Hypothesentest.

$\Theta_0 = \{\theta$ [Nicht beantwortet. ⬍] $0.05\}$

$\Theta_1 = \{\theta$ [Nicht beantwortet. ⬍] $0.05\}$

Hinweis: Beachten Sie, dass Sie sowohl eine Hypothese als auch eine Alternative ausgewählt haben müssen, um Feedback zu bekommen.

Aufgabe – Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art berechnen:

(c) Bestimmen Sie die maximale Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art für diesen Hypothesentest.

$\alpha =$ [ ]

Hinweis: Wenn Sie gerundete Werte eingeben, dann runden Sie bitte auf zwei Nachkommastellen.

i.) Zwischenschritt – Zutreffende Aussagen auswählen:

(c.1) Markieren Sie die zutreffenden Aussagen:

- ☐ Der Fehler erster Art besteht darin, die Hypothese nicht zu verwerfen, obwohl die Alternative zutrifft.
- ☐ Der Fehler erster Art besteht darin, die Hypothese zu verwerfen, obwohl sie zutrifft.
- ☐ Die Produktionscharge wird entsorgt, obwohl die tatsächliche Fehlerquote 0.05 beträgt. Die Qualitätskontrolle macht dabei einen Fehler erster Art.
- ☐ $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(X < 3)$
- ☐ Die Produktionscharge wird nicht entsorgt, obwohl die tatsächliche Fehlerquote größer als 0.05 ist. Die Qualitätskontrolle macht dabei einen Fehler erster Art.
- ☐ $\alpha = \sup\limits_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(X \geq 3)$

ii.) Zwischenschritt – Passende Wahrscheinlichkeitsfunktion angeben:

Wir können den Fehler erster Art wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}\alpha &= P_{0.05}(X \geq 3)\\ &= 1 - P_{0.05}(X \leq 2)\\ &= 1 - (P_{0.05}(X = 0) + \cdots + P_{0.05}(X = 2))\end{aligned}$$

Dies liegt daran, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art eine monoton wachsende Funktion von θ ist und ihren größten Wert daher bei $\theta = 0.05$ annimmt.

(c.2) Geben Sie die passende Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Zufallsvariable X unter der Hypothese an.

$P_{0.05}(X = k) =$ [ ]

Aufgabe – Macht berechnen:

(d) Angenommen die tatsächliche Fehlerquote beträgt $\theta = 0.2$. Berechnen Sie die Macht:

$\beta_{0.2} =$ [ ]

i.) Zwischenschritt – Korrekte Formel auswählen:

(c) Bestimmen Sie die maximale Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art für diesen Hypothesentest.

$\alpha =$ [ ]

Hinweis: Wenn Sie gerundete Werte eingeben, dann runden Sie bitte auf zwei Nachkommastellen.

ii.) Zwischenschritt – Passende Wahrscheinlichkeitsfunktion angeben:

(c) Bestimmen Sie die maximale Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art für diesen Hypothesentest.

$\alpha =$ [ ]

Hinweis: Wenn Sie gerundete Werte eingeben, dann runden Sie bitte auf zwei Nachkommastellen.

Aufgabe – p-Wert berechnen:

(e) Gestern zählte die Qualitätskontrolle $x = 4$ defekte Lampen in ihrer Stichprobe. Bestimmen Sie den p-Wert und geben Sie ihn auf mindestens zwei Nachkommastellen genau an.

$p =$ [ ]

i.) Zwischenschritt – Korrekte Formel auswählen:

(e.1) Markieren Sie die zutreffenden Aussagen:

- ○ $p = \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(X < 3)$
- ○ $p = \sup_{\theta\in\Theta_1} P_\theta(X < 3)$
- ○ $p = \sup_{\theta\in\Theta_1} P_\theta(X \geq 3)$
- ○ $p = \sup_{\theta\in\Theta_1} P_{0.2}(X \geq 3)$
- ○ $p = \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(X \geq 3)$

ii.) Zwischenschritt – Passende Wahrscheinlichkeitsfunktion angeben:

Weil die Wahrscheinlichkeit $P_\theta(X \geq 4)$ monoton mit θ wächst, können wir den p-Wert wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} p &= \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(X \geq 4) \\ &= P_{0.05}(X \geq 4) \\ &= 1 - P_{0.05}(X \leq 3) \\ &= 1 - (P_{0.05}(X = 0) + \cdots + P_{0.05}(X = 3)) \end{aligned}$$

(e.2) Geben Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit $P_{0.05}(X = k)$ an:

$P_{0.05}(X = k) =$ [ ]