

Handreichung zur Aufgabe „Das Gewicht einer Großpackung Schokolinsen“

Titel der Aufgabe: Das Gewicht einer Großpackung Schokolinsen

Screenshot der anfänglichen Aufgabe:

Die Mitarbeiter:innen des Lehrstuhls Mathematik XII haben 20 Großpackungen von Schokolinsen gewogen. Das mittlere Gewicht betrug 169 g, die Stichprobenvarianz war 1 g^2 . Wir nehmen an, dass das Gewicht einer zufällig gewählten Packung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt ist, wobei μ und σ^2 unbekannte Parameter sind.

(a) Bestimmen Sie ein 95.0 %-Konfidenzintervall für den unbekanntem Erwartungswert μ . Geben Sie die Intervallgrenzen bitte mit mindestens zwei Nachkommastellen an. Sie können das Intervall so eingeben: $[a, b]$.

Antwort:

Autoren: Daniel Meißner und Herold Dehling, Ruhr-Universität Bochum

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Zielgruppe: Studierende der Mathematik und in Serviceveranstaltungen

Thema: Statistik

Tags: Stochastik, Statistik, Konfidenzintervall, Erwartungswert, Varianz

Randomisierung: ja

Aufgabentyp: tutorielle Aufgabe¹

Beschreibung: Mitarbeiter:innen eines Lehrstuhls haben ein Stichprobe von Schokolinsenpackungen gewogen. Wir modellieren das Gewicht durch eine normalverteilte Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert und unbekannter Varianz. In dieser Aufgabe wird nach einem Konfidenzintervall für den Erwartungswert und für die Varianz gefragt. Außerdem wird eine Verständnisfrage zu Konfidenzintervallen im Allgemeinen gestellt.

Didaktische Überlegungen: Die Studierenden lernen, Daten aus dem Alltag (Gewicht von Packungen Schokolinsen) mathematisch-statistisch zu analysieren und Schätzer sowie Konfidenzintervalle für die unbekanntem Parameter zu bestimmen. Das hier vorgestellte Normalverteilungsmodell zählt zu den wichtigsten statistischen Modellen überhaupt, sodass ein sicherer Umgang mit diesen statistischen Verfahren unerlässlich ist.

Enthaltene Fremdmaterialien: keine

Daten oder Links (evtl. aktualisieren): keine

Lizenz: „Handreichung zur Aufgabe ‚Das Gewicht einer Großpackung Schokolinsen‘“ wurde entwickelt von Daniel Meißner an der Ruhr-Universität Bochum. Dieses Werk ist lizenziert unter der Lizenz „Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>. 

¹Eine *tutorielle Aufgabe* ist eine digitale Aufgabe, die im Falle einer fehlerhaften Antwort in kleinere und einfachere Teilaufgaben unterteilt wird. Nach der Bearbeitung dieser Teilaufgaben werden die Lernenden zur erneuten Bearbeitung der ursprünglichen Aufgabe aufgefordert.

Screenshots aus der Aufgabe

Aufgabe – Konfidenzintervall für den Erwartungswert berechnen:

Die Mitarbeiter:innen des Lehrstuhls Mathematik XII haben 20 Großpackungen von Schokolinsen gewogen. Das mittlere Gewicht betrug 169 g, die Stichprobenvarianz war 1 g^2 . Wir nehmen an, dass das Gewicht einer zufällig gewählten Packung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt ist, wobei μ und σ^2 unbekannte Parameter sind.

(a) Bestimmen Sie ein 95.0 %-Konfidenzintervall für den unbekanntem Erwartungswert μ . Geben Sie die Intervallgrenzen bitte mit mindestens zwei Nachkommastellen an. Sie können das Intervall so eingeben: [a, b].

Antwort:

i.) Zwischenschritt – Richtige Formel auswählen:

(a.1) Wir wollen ein Konfidenzintervall für den unbekanntem Erwartungswert μ bei gegebener Stichprobenvarianz bestimmen. Welche Formel ist die richtige?

- $\left[\bar{X} - t_{n-1;0.975} \sqrt{\frac{s_X^2}{n}}, \bar{X} + t_{n-1;0.975} \sqrt{\frac{s_X^2}{n}} \right]$
- $\left[\bar{X} - t_{n-1;0.975} s_X, \bar{X} + t_{n-1;0.975} s_X \right]$
- $\left[(n-1) \frac{s_X^2}{\chi_{n-1;0.975}^2}, (n-1) \frac{s_X^2}{\chi_{n-1;0.025}^2} \right]$
- $\left[\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$

ii.) Zwischenschritt – Passendes Quantil angeben:

(a.2) Bestimmen Sie den Wert für das $t_{n-1;0.975}$ -Quantil. Geben Sie den Wert bitte mit mindestens zwei Nachkommastellen an.

$t_{n-1;0.975} =$

Aufgabe – Bedeutung des Konfidenzintervalls angeben:

(b) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- Wir können sicher sein, dass der unbekanntem Parameter μ in dem Konfidenzintervall liegt.
- Wenn wir das von uns verwendete Verfahren immer wieder auf jedes mal neue Packungen anwenden, so wird der unbekanntem Parameter μ in 95.0 % aller Fälle im Konfidenzintervall liegen.

Aufgabe – Konfidenzintervall für die Varianz berechnen:

(c) Bestimmen Sie ein 95.0%-Konfidenzintervall für die unbekanntem Varianz σ^2 . Geben Sie die Intervallgrenzen bitte mit mindestens zwei Nachkommastellen an. Sie können das Intervall so eingeben: [a, b].

Antwort:

i.) Zwischenschritt – Richtige Formel auswählen:

(c.1) Wir wollen ein Konfidenzintervall für die unbekannte Varianz σ^2 bei gegebenen Stichprobenvarianz bestimmen. Welche Formel ist die richtige?

- $[\bar{X} - t_{n-1;0.975} s_X, \bar{X} + t_{n-1;0.975} s_X]$
- $\left[(n-1) \frac{s_X^2}{\chi_{n-1;0.975}^2}, (n-1) \frac{s_X^2}{\chi_{n-1;0.025}^2} \right]$
- $\left[\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
- $\left[\bar{X} - t_{n-1;0.975} \sqrt{\frac{s_X^2}{n}}, \bar{X} + t_{n-1;0.975} \sqrt{\frac{s_X^2}{n}} \right]$

ii.) Zwischenschritt – Passende Quantile angeben:

(c.2) Bestimmen Sie die Werte für das $\chi_{n-1;0.025}^2$ - und das $\chi_{n-1;0.975}^2$ -Quantil. Geben Sie die Werte bitte mit mindestens zwei Nachkommastellen an.

$$\chi_{n-1;0.025}^2 = \text{[]}$$

$$\chi_{n-1;0.975}^2 = \text{[]}$$