Handreichung zur Aufgabe „Sigma-Bereiche“

Titel der Aufgabe:	Sigma-Bereiche
Screenshot der anfänglichen Aufgabe:	Bei einer einzeldosierten Arzneiform mit einem Sollgewicht von $\mu = 50$ mg gibt der Hersteller als Standardabweichung den Wert $\sigma = 2$ mg an. Zur Qualitätskontrolle einer produzierten Charge werden von 20 ausgewählten Tabletten die Gewichte $x_1, \ldots, x_{20}$ mittels einer Analysenwaage gewogen und das arithmetische Mittel $\overline{x}_{20} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i$ als Prüfgröße herangezogen. Es wird angenommen, dass die gemessenen Gewichte Realisierungen von unabhängigen und identisch $\mathrm{N}(50, 4)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{20}$ sind. **(a)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das zufällige Gewicht X_1 einer einzelnen Tablette um höchstens zwei Standardabweichungen σ vom Sollgewicht μ abweicht. Die Wahrscheinlichkeit beträgt $P(\lvert X_1 - \mu\rvert \leq 2\sigma) = P(\lvert X_1 - 50\rvert \leq 4) \approx$ ______. *Runden Sie das Ergebnis auf mindestens drei Nachkommastellen.*
Autoren:	Axel Bücher, Peter Kern, Christian Müller, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Lizenz:	CC BY-SA 4.0
Zielgruppe:	Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematik, Physik, Informatik, Ingenieurwissenschaften, Wirtschaftswissenschaften, Pharmazie, Humanmedizin und Gesundheitswissenschaften
Thema:	Zentraler Grenzwertsatz und Normalapproximation
Tags:	Stochastik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Normalverteilung, Standardisierung, Z-Transformation, standardisierte Summenvariable, Sigma-Regeln
Randomisierung:	ja
Aufgabentyp:	tutorielle Aufgabe[1]
Beschreibung:	In der Aufgabe sollen die Studierenden berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine normalverteilte Zufallsvariable um ein Vielfaches der Standardabweichung von ihrem Erwartungswert abweicht. Anschließend soll dieselbe Fragestellung für das arithmetische Mittel von normalverteilten Zufallsvariablen untersucht werden. Bei falschen Antworten bekommen sie durch Teilaufgaben eine Hilfestellung bei der Standardisierung.
Didaktische Überlegungen:	Die Studierenden lernen das Rechnen mit der Normalverteilung und parallel dazu die Sigma-Regeln. Zwischenschritte helfen ihnen dabei, die Zufallsvariable zu standardisieren und die Wahrscheinlichkeit mit der Funktion Φ zu berechnen. Sie lernen außerdem, dass der Stichprobenumfang beim arithmetischen Mittel sich nur auf die Standardabweichung und nicht auf den Erwartungswert auswirkt. Dabei erkennen sie, dass die Sigma-Regeln weiterhin gültig sind, das Bilden des arithmetischen Mittels jedoch zu einer kleineren Sigma-Umgebung führt.
Enthaltene Fremdmaterialien:	Diese Aufgabe bindet das Skript `stackselbstlern.js` von Michael Kallweit für die Aufgabennavigation ein.
Daten oder Links (evtl. aktualisieren):	keine

[1] Eine *tutorielle Aufgabe* ist eine digitale Aufgabe, die im Falle einer fehlerhaften Antwort in kleinere und einfachere Teilaufgaben unterteilt wird. Nach der Bearbeitung dieser Teilaufgaben werden die Lernenden zur erneuten Bearbeitung der ursprünglichen Aufgabe aufgefordert.

Screenshots aus der Aufgabe

(a) Teilaufgabe – Wahrscheinlichkeit berechnen:

Bei einer einzeldosierten Arzneiform mit einem Sollgewicht von $\mu = 50$ mg gibt der Hersteller als Standardabweichung den Wert $\sigma = 2$ mg an. Zur Qualitätskontrolle einer produzierten Charge werden von 20 ausgewählten Tabletten die Gewichte $x_1, \ldots, x_{20}$ mittels einer Analysenwaage gewogen und das arithmetische Mittel $\overline{x}_{20} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i$ als Prüfgröße herangezogen. Es wird angenommen, dass die gemessenen Gewichte Realisierungen von unabhängigen und identisch $\mathrm{N}(50, 4)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{20}$ sind.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das zufällige Gewicht X_1 einer einzelnen Tablette um höchstens zwei Standardabweichungen σ vom Sollgewicht μ abweicht.

Die Wahrscheinlichkeit beträgt $P(|X_1 - \mu| \leq 2\sigma) = P(|X_1 - 50| \leq 4) \approx$ _____ . *Runden Sie das Ergebnis auf mindestens drei Nachkommastellen.*

i.) Zwischenschritt – Ereignis umschreiben:

(a1) Das Ziel ist, die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung zu berechnen. Dazu muss zuerst die das Ereignis beschreibende Betragsungleichung aufgelöst und als Ungleichungskette geschrieben werden.

Formen Sie den folgenden Term so um, dass weiterhin Gleichheit gilt:
$P(|X_1 - 50| \leq 4) = P($ _____ $\leq X_1 \leq$ _____ $)$.

ii.) Zwischenschritt – Standardisierung durchführen:

(a2) Die Rechnung lautet bis jetzt:

$$P(|X_1 - 50| \leq 4) = P(46 \leq X_1 \leq 54).$$

Um auf die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung zu kommen, wird eine standardnormalverteilte Zufallsvariable gebraucht. X_1 ist zwar normalverteilt, aber nicht standardnormalverteilt, sodass X_1 nun zu X_1^* standardisiert werden muss.

Formen Sie den folgenden Term so um, dass weiterhin Gleichheit gilt:
$P(46 \leq X_1 \leq 54) = P($ _____ $\leq X_1^* \leq$ _____ $)$. *Geben Sie jeweils das Ergebnis als Formel ein oder runden Sie auf mindestens zwei Nachkommastellen.*

Hinweis: Die Standardisierung einer Zufallsvariablen X ist die Zufallsvariable $X^* = \dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$. Um X zu standardisieren, muss somit zuerst der Erwartungswert subtrahiert und anschließend durch die Standardabweichung dividiert werden.

iii.) Zwischenschritt – auf Φ umschreiben:

(a3) Die Rechnung lautet bis jetzt:

$$\begin{aligned} P(|X_1 - 50| \leq 4) &= P(46 \leq X_1 \leq 54) \\ &= P(-2 \leq X_1^* \leq 2). \end{aligned}$$

Mit der standardnormalverteilten Zufallsvariablen X_1^* kann die Wahrscheinlichkeit nun mithilfe der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung aufgeschrieben werden.

Formen Sie den folgenden Term so um, dass weiterhin Gleichheit gilt:
$P(-2 \leq X_1^* \leq 2) = \Phi($ ___ $)-\Phi($ ___ $)$.

(b) Teilaufgabe – Verteilung des arithmetischen Mittels bestimmen:

(b) Als Prüfgröße bei der Qualitätskontrolle wird nicht das Gewicht einer einzelnen Tablette, sondern das mittlere Gewicht von 20 Tabletten ermittelt. Man kann zeigen, dass die Zufallsvariable $\overline{X}_{20}$, die das arithmetische Mittel der Gewichte beschreibt, wieder eine Normalverteilung besitzt. Berechnen Sie die Parameter dieser Normalverteilung, also den Erwartungswert $\overline{\mu} = \mathrm{E}(\overline{X}_{20})$ und die Varianz $\overline{\sigma}^2 = \mathrm{Var}(\overline{X}_{20})$.

Das arithmetische Mittel hat die Verteilung $\overline{X}_{20} \sim \mathrm{N}(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2) = \mathrm{N}($ ___ , ___ $)$.

(c) Teilaufgabe – Wahrscheinlichkeit berechnen:

(c) Es gilt $\overline{X}_{20} \sim \mathrm{N}(50, \frac{1}{5})$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das arithmetische Mittel $\overline{X}_{20}$ um höchstens zwei Standardabweichungen $\overline{\sigma}$ vom Mittelwert $\overline{\mu}$ abweicht.

Die Wahrscheinlichkeit beträgt $P(|\overline{X}_{20} - \overline{\mu}| \leq 2\overline{\sigma}) = P(|\overline{X}_{20} - 50| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}) \approx$ ___ . *Runden Sie das Ergebnis auf mindestens drei Nachkommastellen.*

i.) Zwischenschritt – Ereignis umschreiben:

(c1) Das Ziel ist wieder, die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung zu berechnen. Dazu muss zuerst die das Ereignis beschreibende Betragsungleichung aufgelöst und als Ungleichungskette geschrieben werden.

Formen Sie den folgenden Term so um, dass weiterhin Gleichheit gilt:
$P(|\overline{X}_{20} - 50| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}) = P($ ___ $\leq \overline{X}_{20} \leq$ ___ $)$.

ii.) Zwischenschritt – Standardisierung durchführen:

(c2) Die Rechnung lautet bis jetzt:

$$P\left(|\overline{X}_{20} - 50| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = P\left(50 - \frac{2}{\sqrt{5}} \leq \overline{X}_{20} \leq \frac{2}{\sqrt{5}} + 50\right).$$

Um auf die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung zu kommen, wird eine standardnormalverteilte Zufallsvariable gebraucht. $\overline{X}_{20}$ ist zwar normalverteilt, aber nicht standardnormalverteilt, sodass $\overline{X}_{20}$ nun zu $\overline{X}^*_{20}$ standardisiert werden muss.

Formen Sie den folgenden Term so um, dass weiterhin Gleichheit gilt:
$P(50 - \frac{2}{\sqrt{5}} \leq \overline{X}_{20} \leq \frac{2}{\sqrt{5}} + 50) = P($ ____ $\leq \overline{X}^*_{20} \leq$ ____ $)$. *Geben Sie jeweils das Ergebnis als Formel ein oder runden Sie auf mindestens zwei Nachkommastellen.*

Hinweis: Die Standardisierung einer Zufallsvariablen X ist die Zufallsvariable $X^* = \dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$. Um X zu standardisieren, muss somit zuerst der Erwartungswert subtrahiert und anschließend durch die Standardabweichung dividiert werden.

iii.) Zwischenschritt – auf Φ umschreiben:

(c3) Die Rechnung lautet bis jetzt:

$$P\left(|\overline{X}_{20} - 50| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = P\left(50 - \frac{2}{\sqrt{5}} \leq \overline{X}_{20} \leq \frac{2}{\sqrt{5}} + 50\right)$$
$$= P(-2 \leq \overline{X}^*_{20} \leq 2).$$

Mit der standardnormalverteilten Zufallsvariablen $\overline{X}^*_{20}$ kann die Wahrscheinlichkeit nun mithilfe der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung aufgeschrieben werden.

Formen Sie den folgenden Term so um, dass weiterhin Gleichheit gilt:
$P(-2 \leq \overline{X}^*_{20} \leq 2) = \Phi($ ____ $)-\Phi($ ____ $)$.