

# Handreichung für Dozierende zum Themenpaket Zentraler Grenzwertsatz und Normalapproximation

OER.Stochastik.nrw

## Materialien in diesem Paket

1 Video, 2 Interaktive Anwendungen, 3 Aufgaben

## Fachbereiche

Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematik, Physik, Informatik, Ingenieurwissenschaften, Wirtschaftswissenschaften, Pharmazie, Humanmedizin und Gesundheitswissenschaften

## Kurzbeschreibung der Materialien

### Video: Der zentrale Grenzwertsatz

Ausgehend von Beobachtungen beim Galtonbrett wird das Verhalten der Binomialverteilung für wachsendes  $n$  untersucht. Die Auswirkungen von Zentrierung und Standardisierung auf die Dichte und die Verteilungsfunktion werden grafisch dargestellt. Schließlich wird der zentrale Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace mathematisch präzise formuliert, jedoch nicht bewiesen. Die Gültigkeit der Aussage auch ohne eine konkrete Verteilungsannahme wird diskutiert.

### Interaktive Anwendung: Das Galtonbrett und das Kapteynbrett

Ein interaktives Galtonbrett illustriert den zentralen Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace, da sich annähernd eine Normalverteilung einstellt. Ein interaktives Kapteynbrett, eine multiplikative Version des Galtonbretts, ergibt stattdessen eine Annäherung an eine Log-Normalverteilung. In Arbeitsaufträgen sollen die Beobachtungen mathematisch modelliert und mit dem zentralen Grenzwertsatz erklärt werden.

### Interaktive Anwendung: Die Normalapproximation

Für verschiedene Kombinationen ihrer Parameter kann der Unterschied zwischen den Dichten von Binomial- und Normalverteilung interaktiv erkundet werden. Ebenso kann die Genauigkeit der Normalapproximation (mit und ohne Stetigkeitskorrektur) anhand der Verteilungsfunktionen von standardisierter Binomialverteilung und Standardnormalverteilung erkundet werden. Ein Beobachtungsauftrag leitet die eigenständige Erkundung der Grafiken an. Der zentrale Grenzwertsatz liefert eine mathematische Erklärung für die beobachteten Zusammenhänge.

### Aufgabe: Normalapproximation

In der Aufgabe sollen die Studierenden eine Binomial-Wahrscheinlichkeit zuerst exakt berechnen und anschließend mit der Normalapproximation approximativ berechnen. Die Normalapproximation soll einmal mit und einmal ohne Stetigkeitskorrektur durchgeführt werden.

### Aufgabe: Sigma-Bereiche

In der Aufgabe sollen die Studierenden berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine normalverteilte Zufallsvariable um ein Vielfaches der Standardabweichung von ihrem Erwartungswert abweicht. Anschließend soll dieselbe Fragestellung für das arithmetische Mittel von normalverteilten Zufallsvariablen untersucht werden.

### Aufgabe: Passagiere Lufthansa

Fluglinien verkaufen oft mehr Tickets für einen Flug, als es Plätze im Flugzeug gibt. Die Anzahl der zum Abflug erscheinenden Passagiere wird als Realisierung einer binomialverteilten Zufallsvariablen modelliert. In dieser Aufgabe soll mithilfe der Normalapproximation die Überbuchungswahrscheinlichkeit für einen Transatlantikflug berechnet werden.

## Schlagwörter

*Mit einem \* markierte Begriffe werden als bekannt vorausgesetzt.*

\*Bernoulli-Verteilung, \*Binomialverteilung, \*Normalverteilung, \*Zähldichte, \*Wahrscheinlichkeitsfunktion, \*Dichtefunktion, \*Verteilungsfunktion, \*unabhängig und identisch verteilt, Galtonbrett, Kapteynbrett, Standardisierung/Z-Transformation, standardisierte Summenvariable, zentraler Grenzwertsatz, Satz von de Moivre-Laplace, Normalapproximation, Stetigkeitskorrektur, exakte und approximative Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, grafische Visualisierung der Normalapproximation, Sigma-Regeln

## Einsatzszenarien

Das Themenpaket ist modular aufgebaut, alle Materialien können einzeln und unabhängig voneinander eingesetzt werden.

- Das Video bietet einen motivierenden Einstieg in das Thema zentraler Grenzwertsatz. Es wird parallel zum entsprechenden Vorlesungsabschnitt gezeigt oder den Studierenden zur eigenständigen Vorbereitung im Flipped Classroom Szenario zur Verfügung gestellt.
- Mit den interaktiven Anwendungen erkunden die Studierenden eigenständig und mithilfe von Beobachtungsaufträgen das Galtonbrett und die Normalapproximation. Sie wiederholen und vertiefen auf diese Weise den Vorlesungsstoff. Die interaktiven Anwendungen können auch direkt in der Vorlesung gezeigt werden.
- Die Aufgaben ergänzen im wöchentlichen Übungsbetrieb die schriftlichen Hausaufgaben zur Normalapproximation. Die Studierenden nutzen sie zur Wiederholung des Vorlesungsstoffs und zur Prüfungsvorbereitung. Weitere Informationen befinden sich in separaten Handreichungen zu den einzelnen Aufgaben.

## Ausblick

Das Projekt OER.Stochastik.nrw stellt weiterführende Materialien zur Verfügung.

- Das Themenpaket **Diskrete Verteilungen** beinhaltet Materialien zum Poissonschen Grenzwertsatz und zur Poisson-Approximation, die eine weitere Möglichkeit zur Approximation der Binomialverteilung aufzeigen.

## Literaturhinweise

- [1] H. Dehling, B. Haupt (2004) Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. 2. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Kapitel 10
- [2] N. Henze (2019) Stochastik: Eine Einführung mit Grundzügen der Maßtheorie. 1. Auflage. Springer Spektrum Berlin, Heidelberg. Kapitel 6.4
- [3] N. Henze (2021) Stochastik für Einsteiger. 13. Auflage. Springer Spektrum Berlin Heidelberg. Kapitel 28



„Handreichung für Dozierende zum Themenpaket Zentraler Grenzwertsatz und Normalapproximation“ wurde entwickelt von Riko Kelter, Jonas Lache, Daniel Meißner, Christian Müller (OER.Stochastik.nrw)

Dieses Werk ist lizenziert nach CC BY SA 4.0. Ausgenommen aus der Lizenz sind alle Logos. Der Lizenzvertrag ist hier abrufbar: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Das Werk ist online verfügbar unter: <https://www.orca.nrw>