Handreichung zur Aufgabe „Der Wasserstand der Ruhr in Hattingen“

Titel der Aufgabe:	Der Wasserstand der Ruhr in Hattingen
Screenshot der anfänglichen Aufgabe:	Der maximale Wasserstand [gemessen in m] der Ruhr bei Hattingen in einem Jahr wird durch eine Zufallsvariable X mit der folgenden Verteilungsfunktion beschrieben: $F(x) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} & \text{für } x \geq 1 \\ 0 & \text{für } x < 1. \end{cases}$ **(a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der maximale Wasserstand im kommenden Jahr mehr als 7 Meter betragen wird. Antwort:
Autoren:	Daniel Meißner und Herold Dehling, Ruhr-Universität Bochum
Lizenz:	CC BY-SA 4.0
Zielgruppe:	Studierende der Mathematik und in Serviceveranstaltungen
Thema:	Stetige Verteilungen
Tags:	Stochastik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Stetige Verteilungen, Erwartungswert
Randomisierung:	ja
Aufgabentyp:	tutorielle Aufgabe[1]
Beschreibung:	Der Wasserstand der Ruhr in Hattingen wird durch eine Zufallvariable mit stetiger Verteilung modelliert. Die Studierenden sollen die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Pegel überschritten wird, mithilfe der Verteilungsfunktion bestimmen. In einem zweiten Aufgabenteil wird nach der Verteilungsfunktion einer Transformierten dieser Zufallsvariablen gefragt.
Didaktische Überlegungen:	In dieser Aufgabe üben die Studierenden den Umgang mit der Verteilungsfunktion. Durch praktische Berechnungen soll das Verständnis für stetige Zufallsvariablen vertieft und Sicherheit bei Berechnungen mit der Verteilungsfunktion erreicht werden. Die Frage nach der Verteilungsfunktion einer transformierten Zufallsvariablen erfordert eine kleine Transferleistung, da die Studierenden keine bekannten Formeln anwenden können. Für beide Aufgabenteile gibt es Hilfeschritte in Form einer schrittweisen Lösung der Aufgabe.
Enthaltene Fremdmaterialien:	keine
Daten oder Links (evtl. aktualisieren):	keine

[1] Eine *tutorielle Aufgabe* ist eine digitale Aufgabe, die im Falle einer fehlerhaften Antwort in kleinere und einfachere Teilaufgaben unterteilt wird. Nach der Bearbeitung dieser Teilaufgaben werden die Lernenden zur erneuten Bearbeitung der ursprünglichen Aufgabe aufgefordert.

Screenshots aus der Aufgabe

Aufgabe – Wahrscheinlichkeit berechnen:

Der maximale Wasserstand [gemessen in m] der Ruhr bei Hattingen in einem Jahr wird durch eine Zufallsvariable X mit der folgenden Verteilungsfunktion beschrieben:

$$F(x) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} & \text{für } x \geq 1 \\ 0 & \text{für } x < 1. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der maximale Wasserstand im kommenden Jahr mehr als 7 Meter betragen wird.

Antwort:

i.) Zwischenschritt – In mathematische Notation übersetzen:

(a.1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der maximale Wasserstand im kommenden Jahr mehr als 7 Meter betragen wird. Drücken Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit in mathematischen Symbolen aus.

- ○ $P(X > 7)$
- ○ $P(X > 8)$
- ○ $P(X \geq 8)$
- ○ $P(X \geq 7)$

ii.) Zwischenschritt – Mithilfe der Verteilungsfunktion ausdrücken:

(a.2) Drücken Sie $P(X > 7)$ durch die Verteilungsfunktion von X aus, indem Sie zur Gegenwahrscheinlichkeit übergehen.

Hinweis: Den Wert der Verteilungsfunktion von X an der Stelle x geben Sie als `F(x)` ein.

Aufgabe – Verteilungsfunktion berechnen:

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $Y := \ln(X)$.

- ○ $(1 - e^{-2y})1_{[0,\infty)}(y)$
- ○ $(1 - (\ln y)^{-2})1_{[0,\infty)}(y)$
- ○ $e^{-2y}1_{[0,\infty)}(y)$
- ○ $\frac{1}{y}(1 - (\ln y)^{-2})1_{(0,\infty)}(y)$
- ○ $(1 - e^{2y})1_{[0,\infty)}(y)$

i.) Zwischenschritt – Definition für Verteilungsfunktion auswählen:

(b.1) Wir bezeichnen die Verteilungsfunktion von $Y = \ln(X)$ mit G. Welche Aussage über G stimmt?

- ○ $G(a) = P(Y \leq a)$ für alle a.
- ○ $G(a) = P(Y = a)$ für alle a.
- ○ $G(a) = P(Y \geq a)$ für alle a.

ii.) Zwischenschritt – Ereignis mithilfe von X ausdrücken:

(b.2) Wir wollen die Wahrscheinlichkeit $P(Y \leq a)$ mit $Y = \ln(X)$ bestimmen. Wie können wir das Ereignis $\{Y \leq a\}$ durch die Zufallsvariable X ausdrücken?

- ○ $\{X > e^a\}$
- ○ $\{X \leq e^a\}$
- ○ $\{X \leq \ln(a)\}$
- ○ $\{X = e^a\}$
- ○ $\{X \leq e^Y\}$