

# Handreichungen zur Aufgabe „Verteilungsfunktion“

Titel der Aufgabe:	Verteilungsfunktion
Autoren:	<a href="#">Riko Kelter</a> , Universität Siegen
Lizenz:	<a href="#">CC BY-SA 4.0</a>
Zielgruppe:	Studierende der Mathematik und von Serviceveranstaltungen
Thema:	Kombinatorik
Tags:	Stochastik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Integrationstheorie, stetige Verteilungen
Randomisierung:	nein
Aufgabentyp:	tutorielle Aufgabe <sup>1</sup>
Beschreibung:	In der Aufgabe sollen die Studierenden anhand eines Beispiels die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichte wiederholen, und eine Verteilungsfunktion bestimmen.
Didaktische Überlegungen:	Mit Hilfe von Kenntnissen zu den Normierungseigenschaften von Wahrscheinlichkeitsdichten und Kenntnissen zur Lebesgue-Integration lässt sich die Aufgabe durch einige algebraische Umformungen lösen.
Enthaltene Fremdmaterialien:	Diese Aufgabe bindet das Skript <code>stackselbstlern.js</code> von Michael Kallweit für die Aufgabennavigation ein.
Daten oder Links (evtl. aktualisieren):	keine

---

<sup>1</sup>Eine *tutorielle Aufgabe* ist eine digitale Aufgabe, bei der die eigentlich zu lösende Aufgabe in kleinere und einfachere Teilaufgaben unterteilt wird. Die Lernenden werden dann zur Bearbeitung dieser Teilaufgaben aufgefordert, wenn sie die eigentliche Aufgabe nicht lösen können. Die Zwischenschritte sind als Hilfestellung gedacht, die den Lernenden aber nicht nur präsentiert werden, sondern mit denen sich die Lernenden aktiv auseinandersetzen müssen.

Screenshot der anfänglichen Aufgabe:

In dieser Aufgabe lernen Sie in Teil (a), wie Sie die Axiome der Wahrscheinlichkeitsdichte überprüfen, und in Teil (b), wie Sie die Verteilungsfunktion bestimmen.

### Verteilungsfunktion

Sei  $k \in \mathbb{R}$  und  $f_k(x) := k\left(\frac{1}{x}\right)^{k+1}1_{[1,\infty)}(x)$  eine Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ .

**(a)** Warum ist  $f_k(x)$  für  $k = 10$  eine Lebesgue-Dichte?

**(b)** Bestimmen Sie für  $k = 10$  den Wert der Verteilungsfunktion

$F_k(t) := \int_{-\infty}^t f_k(x) dx$  an der Stelle  $t = 1.1$ .

Widmen wir uns zunächst Teilaufgabe (a). Wir wissen, dass aus Stetigkeit die Messbarkeit einer Funktion folgt, und offensichtlich ist  $f_k$  stückweise stetig. Wenn  $f_k$  also messbar ist, warum ist  $f_k$  dann eine Lebesgue-Dichte?

- Weil die Integration von  $f_k$  für  $k = 10$  über die reellen Zahlen nicht negativ ist, also  $\int_{\mathbb{R}} f_k(x) \lambda(dx) \geq 0$  ist.
- Weil die Integration von  $f_k$  für  $k = 10$  über die natürlichen Zahlen den Wert 1 ergibt, also  $\int_{\mathbb{N}} f_k(x) \lambda(dx) = 1$  gilt.
- Weil die Integration von  $f_k$  für  $k = 10$  über die reellen Zahlen positiv ist, also  $\int_{\mathbb{R}} f_k(x) \lambda(dx) > 0$  ist.
- Weil die Integration von  $f_k$  für  $k = 10$  über die reellen Zahlen den Wert 1 ergibt, also  $\int_{\mathbb{R}} f_k(x) \lambda(dx) = 1$  ist.

Prüfen