Handreichung zur Aufgabe „Momente der Gammaverteilung“

Titel der Aufgabe:	Momente der Gammaverteilung
Screenshot der anfänglichen Aufgabe:	Sei X eine Zufallsvariable, die die folgende Dichtefunktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ besitzt: $$f(x) = \frac{\sqrt{7} \cdot e^{-\frac{7 \cdot x}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{x}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$ **(a)** Berechnen Sie den Erwartungswert von X. $\mathrm{E}(X) =$ ______ *Geben Sie den exakten Wert als Formel ein oder runden Sie das Ergebnis auf mindestens drei Nachkommastellen.*
Autoren:	Axel Bücher, Peter Kern, Christian Müller, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Lizenz:	CC BY-SA 4.0
Zielgruppe:	Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematik, Physik, Informatik, Ingenieurwissenschaften, Wirtschaftswissenschaften
Thema:	Stetige Verteilungen
Tags:	Stochastik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Momente von Zufallsvariablen, Erwartungswert, Varianz, Gammaverteilung
Randomisierung:	ja
Aufgabentyp:	tutorielle Aufgabe[1]
Beschreibung:	In der Aufgabe wird zufällig eine Dichtefunktion generiert, die eine Exponential-, Erlang- oder Chi-Quadrat-Verteilung beschreibt. Die Studierenden sollen Erwartungswert, zweites Moment und Varianz einer Zufallsvariablen mit dieser Dichtefunktion berechnen. Bei falschen Antworten bekommen sie durch Teilaufgaben eine Hilfestellung.
Didaktische Überlegungen:	Die Studierenden werden Schritt für Schritt angeleitet, den Erwartungswert und die Varianz einer dichteverteilten Zufallsvariablen zu berechnen. Zwischenschritte helfen ihnen dabei, die richtigen Formeln zur Berechnung des ersten und zweiten Moments sowie der Varianz anzuwenden. Im Feedback bekommen sie zudem Tipps zur konkreten Berechnung der auftretenden Integrale.
Enthaltene Fremdmaterialien:	Diese Aufgabe bindet das Skript `stackselbstlern.js` von Michael Kallweit für die Aufgabennavigation ein.
Daten oder Links (evtl. aktualisieren):	keine

[1] Eine *tutorielle Aufgabe* ist eine digitale Aufgabe, die im Falle einer fehlerhaften Antwort in kleinere und einfachere Teilaufgaben unterteilt wird. Nach der Bearbeitung dieser Teilaufgaben werden die Lernenden zur erneuten Bearbeitung der ursprünglichen Aufgabe aufgefordert.

Screenshots aus der Aufgabe

(a) Teilaufgabe – Erwartungswert berechnen:

Sei X eine Zufallsvariable, die die folgende Dichtefunktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ besitzt:

$$f(x) = \frac{\sqrt{7} \cdot e^{-\frac{7 \cdot x}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{x}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

$\mathrm{E}(X) =$ ______ *Geben Sie den exakten Wert als Formel ein oder runden Sie das Ergebnis auf mindestens drei Nachkommastellen.*

i.) Zwischenschritt – passende Formel für den Erwartungswert auswählen:

(a1) Wie lautet die allgemeine Formel, um den Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen mit Dichtefunktion f zu berechnen?

- ○ $\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty x f(x) \, \mathrm{d}x$
- ○ $\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty f(x) \, \mathrm{d}x$
- ○ $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^\infty x f(x) \, \mathrm{d}x$
- ○ $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^\infty f(x) \, \mathrm{d}x$

ii.) Zwischenschritt – passendes Integral auswählen:

(a2) Den Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen X mit Dichtefunktion f berechnet man allgemein mit der Formel

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^\infty x f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Welches konkrete Integral müssen Sie nun im vorliegenden Fall ausrechnen? Achten Sie auf die Indikatorfunktion in der Definition von f.

- ○ $\int_0^\infty \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{7 \cdot x}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi}} \, \mathrm{d}x$
- ○ $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{7 \cdot x}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi}} \, \mathrm{d}x$
- ○ $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sqrt{7} \cdot e^{-\frac{7 \cdot x}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$
- ○ $\int_0^\infty \frac{\sqrt{7} \cdot e^{-\frac{7 \cdot x}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

(b) Teilaufgabe – zweites Moment berechnen:

(b) Berechnen Sie das zweite Moment von X.

$\mathrm{E}(X^2) =$ ______ *Geben Sie den exakten Wert als Formel ein oder runden Sie das Ergebnis auf mindestens drei Nachkommastellen.*

i.) Zwischenschritt – passende Formel für das zweite Moment auswählen:

(b1) Wie lautet die allgemeine Formel, um das zweite Moment einer stetigen Zufallsvariablen mit Dichtefunktion f zu berechnen?

- ○ $\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$
- ○ $\mathrm{E}(X^2) = \int_{0}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$
- ○ $\mathrm{E}(X^2) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$
- ○ $\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)^2\,\mathrm{d}x$

ii.) Zwischenschritt – passendes Integral auswählen:

(b2) Das zweite Moment einer stetigen Zufallsvariablen X mit Dichtefunktion f berechnet man allgemein mit der Formel

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Welches konkrete Integral müssen Sie nun im vorliegenden Fall ausrechnen? Achten Sie auf die Indikatorfunktion in der Definition von f.

- ○ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{7 \cdot e^{-7 \cdot x}}{2 \cdot \pi}\,\mathrm{d}x$
- ○ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{7} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{7 \cdot x}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}x$
- ○ $\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{7} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{7 \cdot x}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}x$
- ○ $\left(\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{7 \cdot x}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}x\right)^2$

(c) Teilaufgabe – Varianz berechnen:

(c) Berechnen Sie die Varianz von X. Zur Erinnerung: Sie haben in (a) den Erwartungswert $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{7}$ und in (b) das zweite Moment $\mathrm{E}(X^2) = \frac{3}{49}$ berechnet.

$\mathrm{Var}(X) =$ ______ *Geben Sie den exakten Wert als Formel ein oder runden Sie das Ergebnis auf mindestens drei Nachkommastellen.*

i.) Zwischenschritt – passende Formel für die Varianz auswählen:

(c1) Wie lautet die allgemeine Formel, um die Varianz einer Zufallsvariablen zu berechnen?

- ○ $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\big((X - \mathrm{E}(X))^2\big)$
- ○ $\mathrm{Var}(X) = \big(\mathrm{E}(X - \mathrm{E}(X))\big)^2$
- ○ $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$
- ○ $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X)^2 - \mathrm{E}(X^2)$