

Handreichung zur Aufgabe „Lebensdauer eines Fahrradschlauchs“

Titel der Aufgabe: Lebensdauer eines Fahrradschlauchs

Screenshot der anfänglichen Aufgabe:

In dieser Aufgabe fassen wir die Lebensdauer eines Fahrradschlauchs in Jahren als eine Zufallsvariable X auf. Als eine einfache Modellannahme gehen wir davon aus, dass die Dichte von X gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{8} & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} .$$

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(3 \leq X \leq 4)$.

Antwort:

Autoren: Daniel Meißner und Herold Dehling, Ruhr-Universität Bochum

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Zielgruppe: Studierende der Mathematik und in Serviceveranstaltungen

Thema: Stetige Verteilungen

Tags: Stochastik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Stetige Verteilungen, Erwartungswert

Randomisierung: ja


Aufgabentyp: tutorielle Aufgabe¹

Beschreibung: Die Lebensdauer eines Fahrradschlauchs wird durch eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion modelliert. Es sollen die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer einen gegebenen Wert überschreitet, und der Erwartungswert berechnet werden.

Didaktische Überlegungen: In dieser Aufgabe üben die Studierenden den Umgang mit der Dichtefunktion. Durch praktische Berechnungen soll das Verständnis für stetige Zufallsvariablen vertieft und zugleich Sicherheit bei routinemäßigen Berechnungen mit der Dichtefunktion erreicht werden.

Enthaltene Fremdmaterialien: keine

Daten oder Links (evtl. aktualisieren): keine

Lizenz: „Handreichung zur Aufgabe ‚Lebensdauer eines Fahrradschlauchs‘“ wurde entwickelt von Daniel Meißner an der Ruhr-Universität Bochum. Dieses Werk ist lizenziert unter der Lizenz „Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>. 

¹Eine *tutorielle Aufgabe* ist eine digitale Aufgabe, die im Falle einer fehlerhaften Antwort in kleinere und einfachere Teilaufgaben unterteilt wird. Nach der Bearbeitung dieser Teilaufgaben werden die Lernenden zur erneuten Bearbeitung der ursprünglichen Aufgabe aufgefordert.

Screenshots aus der Aufgabe

Aufgabe – Wahrscheinlichkeit berechnen:

In dieser Aufgabe fassen wir die Lebensdauer eines Fahrradschlauchs in Jahren als eine Zufallsvariable X auf. Als eine einfache Modellannahme gehen wir davon aus, dass die Dichte von X gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{8} & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}.$$

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(3 \leq X \leq 4)$.

Antwort:

i.) Zwischenschritt – Passendes Integral auswählen:

(a.1) Bei Zufallsvariablen mit stetiger Verteilung können wir Wahrscheinlichkeiten mithilfe eines Integrals über die Dichte ausrechnen. Wenn Sie die Wahrscheinlichkeit $P(3 \leq X \leq 4)$ als Integral schreiben, welches Integral ergibt sich?

- $\int_0^4 \frac{4-x}{8} dx$
- $\int_3^4 \frac{4-x}{8} dx$
- $\int_3^4 \frac{(4-x) \cdot x}{8} dx$
- $\int_0^4 \frac{(4-x) \cdot x}{8} dx$

ii.) Zwischenschritt – Stammfunktion angeben:

(a.2) Im vorherigen Schritt haben Sie das Integral

$$\int_3^4 \frac{4-x}{8} dx$$

ausgewählt. Geben Sie eine Stammfunktion für den Integranden an.

$F(x) =$

Aufgabe – Erwartungswert berechnen:

(b) Berechnen Sie die erwartete Lebensdauer eines Schlauchs.

Antwort:

i.) Zwischenschritt – Passendes Integral auswählen:

(b.1) Sie können die erwartete Lebensdauer eines neu gekauften Schlauchs als Integral schreiben. Wählen Sie das richtige Integral aus:

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(4-x) \cdot x}{8} dx$
- $\int_0^4 \frac{(4-x) \cdot x}{8} dx$
- $\int_0^4 \frac{4-x}{8} dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4-x}{8} dx$

ii.) Zwischenschritt – Stammfunktion angeben:

(b.2) Im vorherigen Schritt haben Sie das Integral

$$\int_0^4 \frac{(4-x) \cdot x}{8} dx$$

ausgewählt. Geben Sie eine Stammfunktion für den Integranden an.

$F(x) =$