Handreichung zur Aufgabe „Lebensdauer einer Fahrradlampe“

Titel der Aufgabe:	Lebensdauer einer Fahrradlampe
Screenshot der anfänglichen Aufgabe:	Eine LED, die zum Bau einer Fahrradlampe eingesetzt wird, hat eine exponentiell verteilte Lebensdauer [gemessen in Jahren] mit Parameter $\lambda = \frac{1}{8}$, d.h. die Dichtefunktion ist $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{8}e^{-\frac{x}{8}} & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$ **(a)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählte LED länger als 4 Jahre funktioniert. Bitte geben Sie das Ergebnis auf mindestens zwei Nachkommastellen genau an. Antwort:
Autoren:	Daniel Meißner und Herold Dehling, Ruhr-Universität Bochum
Lizenz:	CC BY-SA 4.0
Zielgruppe:	Studierende der Mathematik und in Serviceveranstaltungen
Thema:	Stetige Verteilungen
Tags:	Stochastik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Stetige Verteilungen, Erwartungswert
Randomisierung:	ja
Aufgabentyp:	tutorielle Aufgabe[1]
Beschreibung:	Eine Fahrradlampe setzt sich aus vier LEDs zusammen, deren Lebensdauern als unabhängige, exponentialverteilte Zufallsvariablen modelliert werden. Im ersten Aufgabenteil soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass die Lebensdauer einer einzelnen LED eine vorgegebene Grenze überschreitet. Im zweiten Aufgabenteil wird die Lebensdauer der gesamten Fahrradlampe untersucht. Es soll hier ebenfalls eine Überschreitungswahrscheinlichkeit ausgerechnet werden.
Didaktische Überlegungen:	Den Studierenden soll im ersten Teil der Aufgabe üben, wie man die Wahrscheinlichkeit berechnen kann, dass eine stetige Zufallsvariable mit einer gegebenen Dichtefunktion Werte in einem vorgegebenen Intervall annimmt. Im zweiten Teil der Aufgabe sollen die Studierenden lernen, wie man eine alltagssprachlich formulierte Frage („Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach x Jahren alle vier LEDs noch funktionieren“) in die mathematische Formelsprache übersetzen und dann lösen kann. Zusätzlich können die Studierenden erkennen, dass die Verteilung des Minimums der vier Lebensdauern erheblich von der einer einzelnen Lebensdauer abweicht.
Enthaltene Fremdmaterialien:	keine
Daten oder Links (evtl. aktualisieren):	keine

[1]Eine *tutorielle Aufgabe* ist eine digitale Aufgabe, die im Falle einer fehlerhaften Antwort in kleinere und einfachere Teilaufgaben unterteilt wird. Nach der Bearbeitung dieser Teilaufgaben werden die Lernenden zur erneuten Bearbeitung der ursprünglichen Aufgabe aufgefordert.

Screenshots aus der Aufgabe

Aufgabe – Wahrscheinlichkeit berechnen:

Eine LED, die zum Bau einer Fahrradlampe eingesetzt wird, hat eine exponentiell verteilte Lebensdauer [gemessen in Jahren] mit Parameter $\lambda = \frac{1}{8}$, d.h. die Dichtefunktion ist

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{8}e^{-\frac{x}{8}} & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählte LED länger als 4 Jahre funktioniert. Bitte geben Sie das Ergebnis auf mindestens zwei Nachkommastellen genau an.

Antwort: ______

i.) Zwischenschritt – Passende mathematische Ausdrücke auswählen:

(a.1) Es ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass eine zufällig ausgewählte LED länger als 3/2 Jahre funktioniert. Welche der folgenden Ausdrücke hat den gleichen Wert wie die gesuchte Wahrscheinlichkeit?

- ☐ $P\left(X \geq \frac{3}{2}\right)$
- ☐ $P\left(X \leq \frac{3}{2}\right)$
- ☐ $P\left(X < \frac{3}{2}\right)$
- ☐ $P\left(X = \frac{3}{2}\right)$
- ☐ $P\left(X > \frac{3}{2}\right)$

ii.) Zwischenschritt – Passendes Integral auswählen:

(a.2) Bei dichteverteilten Zufallsvariablen können wir Wahrscheinlichkeiten mithilfe eines Integrals über die Dichte ausrechnen. Wenn Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X > \frac{3}{2})$ als Integral schreiben, welches Integral ergibt sich?

- ○ $\displaystyle\int_{-\infty}^{3/2} \frac{1}{12}e^{-\frac{x}{12}}\,dx$
- ○ $\displaystyle\int_{3/2}^{\infty} \frac{1}{12}e^{-\frac{x}{12}}\,dx$
- ○ $\displaystyle\int_{3/2}^{\infty} \frac{1}{12}xe^{-\frac{x}{12}}\,dx$
- ○ $\displaystyle\int_{0}^{3/2} \frac{1}{12}e^{-\frac{x}{12}}\,dx$

iii.) Zwischenschritt – Passende Stammfunktion angeben:

(a.3) Im vorherigen Schritt haben Sie das Integral

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} \frac{1}{12}e^{-\frac{x}{12}}\,dx$$

ausgewählt. Was ist eine richtige Stammfunktion für den Integranden im ausgewählten Integral?

$F(x) =$ ______

Aufgabe – Wahrscheinlichkeit berechnen:

(b) Eine Fahrradlampe besteht aus vier LEDs des oben beschriebenen Typs. Wir bezeichnen ihre Lebensdauern mit $X_1, \ldots, X_4$ und nehmen an, dass diese unabhängig sind.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nach 3/2 Jahren noch alle vier LEDs funktionieren. Bitte geben Sie das Ergebnis auf mindestens zwei Nachkommastellen genau an.

Antwort: ________

i.) Zwischenschritt – Passendes Ereignis auswählen:

(b.1) Wir wollen die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass nach 3/2 Jahren noch alle vier LEDs funktionieren. Welches Ereignis passt zu unserer gesuchten Fragestellung?

- ○ $\{X_1 = \frac{3}{2}, \ldots, X_4 = \frac{3}{2}\}$
- ○ $\{X_1 > \frac{3}{2}, \ldots, X_4 > \frac{3}{2}\}$
- ○ $\{X_1 < \frac{3}{2}, \ldots, X_4 < \frac{3}{2}\}$

ii.) Zwischenschritt – Korrekte Gleichungen auswählen:

(b.2) Jetzt wollen wir die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X_1 > \frac{3}{2}, \ldots, X_4 > \frac{3}{2}\}$ bestimmen. Welche Gleichungen stimmen?

- ☐ $P(X_1 > \frac{3}{2}, \ldots, X_4 > \frac{3}{2}) = P(X_1 > \frac{3}{2}) \cdots P(X_4 > \frac{3}{2})$
- ☐ $P(X_1 > \frac{3}{2}, \ldots, X_4 > \frac{3}{2}) = P(X_1 > \frac{3}{2}) + \cdots + P(X_4 > \frac{3}{2})$
- ☐ $P(X_1 > \frac{3}{2}, \ldots, X_4 > \frac{3}{2}) = P(X_1 > \frac{3}{2})^4$