

Handreichung für Dozierende zum Themenpaket Stetige Verteilungen

OER.Stochastik.nrw

Materialien in diesem Paket

2 Videos, 3 Interaktive Anwendungen, 10 Aufgaben

Fachbereiche

Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematik, Physik, Informatik, Ingenieurwissenschaften, Wirtschaftswissenschaften, Pharmazie, Humanmedizin und Gesundheitswissenschaften

Kurzbeschreibung der Materialien

Video: Was sind eigentlich stetige Zufallsvariablen?

Am Beispiel der Verteilung des Gewichts von Schokolinsen wird der Begriff der stetigen Zufallsvariablen eingeführt.

Video: Grundlagen der Maßtheorie - Mengensysteme und Wahrscheinlichkeitsräume

In diesem Video wird eine Einführung zu Mengensystemen und Wahrscheinlichkeitsräumen gegeben. Es wird motiviert, wieso die Maßtheorie nötig ist, um realistische Probleme stochastisch zu modellieren. Elementare Objekte der Stochastik wie Zufallsvariablen, Mess- und Wahrscheinlichkeitsräume sowie Sigma-Algebren werden motiviert. Die Notwendigkeit der Konstruktion der Borel-Sigma-Algebra wird thematisiert und Anwendungsbeispiele vertiefen die Inhalte.

Interaktive Anwendung: Die Normalverteilung

Die Parameter der Normalverteilung können interaktiv verändert werden, um die Auswirkungen auf die Form der Dichtefunktion sowie den Erwartungswert und die Varianz zu erkunden. Beobachtungsaufträge leiten die eigenständige Erkundung der Grafik an. Ausführliche Berechnungen von Erwartungswert und Varianz liefern eine mathematische Erklärung der beobachteten Zusammenhänge.

Interaktive Anwendung: Die Gumbel-Verteilung

Die Parameter der Gumbel-Verteilung können interaktiv verändert werden, um die Auswirkungen auf die Form der Dichtefunktion sowie den Erwartungswert und die Varianz zu erkunden.

Beobachtungsaufträge leiten die eigenständige Erkundung der Grafik an. Ausführliche Berechnungen von Erwartungswert und Varianz liefern eine mathematische Erklärung der beobachteten Zusammenhänge.

Interaktive Anwendung: Die Weibull-Verteilung

Die Parameter der Weibull-Verteilung können interaktiv verändert werden, um die Auswirkungen auf die Form der Dichtefunktion sowie den Erwartungswert und die Varianz zu erkunden. Beobachtungsaufträge leiten die eigenständige Erkundung der Grafik an. Ausführliche Berechnungen von Erwartungswert und Varianz liefern eine mathematische Erklärung der beobachteten Zusammenhänge.

Aufgabe: Dichte angeben

In dieser Aufgabe geht es um eine Funktion f , die auf einem gegebenen Intervall die Funktionswerte einer unbekannt Funktion g und sonst den Wert 0 annimmt. Die Studierenden sollen ein Beispiel für eine Funktion g angeben, sodass f die Eigenschaften einer Dichtefunktion erfüllt.

Aufgabe: Lebesgue-Dichte

Bei einer Funktion sollen die Axiome einer Wahrscheinlichkeitsdichte, vor allem aber die Normierung, überprüft werden.

Aufgabe: Verteilungsfunktion

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass es sich bei einer gegebenen Funktion um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt, und der Wert der Verteilungsfunktion an einer bestimmten Stelle soll berechnet werden.

Aufgabe: Verteilungsfunktion Logarithmus

Es soll die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen bestimmt werden, die durch Anwendung einer Funktion auf eine Zufallsvariable mit bekannter Verteilung entsteht.

Aufgabe: Momente der Gammaverteilung

In der Aufgabe wird zufällig eine Dichtefunktion generiert, die eine Exponential-, Erlang- oder Chi-Quadrat-Verteilung beschreibt. Die Studierenden sollen Erwartungswert, zweites Moment und Varianz einer Zufallsvariablen mit dieser Dichtefunktion berechnen.

Aufgabe: Lebensdauer eines Fahrradschlauchs

Die Lebensdauer eines Fahrradschlauchs wird durch eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion modelliert. Es sollen die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer einen gegebenen Wert überschreitet, und der Erwartungswert berechnet werden.

Aufgabe: Lebensdauer einer Fahrradlampe

Eine Fahrradlampe setzt sich aus vier LEDs zusammen, deren Lebensdauer als unabhängige, exponentialverteilte Zufallsvariable modelliert wird. Im ersten Aufgabenteil soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass die Lebensdauer einer einzelnen LED eine vorgegebene Grenze

überschreitet. Im zweiten Aufgabenteil wird die Lebensdauer der gesamten Fahrradlampe untersucht. Es soll hier ebenfalls eine Überschreitungswahrscheinlichkeit ausgerechnet werden.

Aufgabe: Der Wasserstand der Ruhr in Hattingen

Der Wasserstand der Ruhr in Hattingen wird durch eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilung modelliert. Die Studierenden sollen die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Pegel überschritten wird, mithilfe der Verteilungsfunktion bestimmen. In einem zweiten Aufgabenteil wird nach der Verteilungsfunktion einer Transformatierten dieser Zufallsvariablen gefragt.

Aufgabe: Müsliriegel zum Wandern (Rechnen mit Normalverteilung)

Das Gewicht eines zufällig ausgewählten Müsliriegels wird durch eine normalverteilte Zufallsvariable mit gegebenem Erwartungswert und gegebener Varianz modelliert. Es wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass der Müsliriegel ein vorgegebenes Gewicht unterschreitet.

Aufgabe: Müsliriegel zum Wandern (mittleres Gewicht und Gesamtgewicht)

Das Gewicht eines zufällig ausgewählten Müsliriegels ist durch eine normalverteilte Zufallsvariable mit gegebenem Erwartungswert und gegebener Varianz modelliert. Die Müsliriegel werden in 4er Packungen verkauft. Die Studierenden sollen den Erwartungswert und die Varianz des Gesamtgewichts einer solchen Packung berechnen. Im zweiten Aufgabenteil soll der Erwartungswert und die Varianz des arithmetischen Mittels der Riegel in einer Packung berechnet werden.

Schlagwörter

*Mit einem * markierte Begriffe werden als bekannt vorausgesetzt.*

*Wahrscheinlichkeitsraum, stetige Zufallsvariable, (gemeinsame) Dichtefunktion, Verteilungsfunktion, Marginal-/Randverteilung, stetige Gleichverteilung, Normalverteilung, Gammaverteilung, Gumbel-Verteilung, Weibull-Verteilung, Momente von Zufallsvariablen, Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung, Wahrscheinlichkeitsmaß, Mengensystem, Sigma-Algebra

Einsatzszenarien

Das Themenpaket ist modular aufgebaut, alle Materialien können einzeln und unabhängig voneinander eingesetzt werden.

- Die Videos bieten einen motivierenden Einstieg in das Thema stetige Verteilungen. Sie werden parallel zum entsprechenden Vorlesungsabschnitt gezeigt oder den Studierenden zur eigenständigen Vorbereitung im Flipped Classroom Szenario zur Verfügung gestellt.
- Mit den interaktiven Anwendungen erkunden die Studierenden eigenständig und mithilfe von Beobachtungsaufträgen verschiedene stetige Verteilungen. Sie wiederholen und vertiefen auf diese Weise den Vorlesungsstoff. Die interaktiven Anwendungen können auch direkt in der Vorlesung gezeigt werden.
- Die Aufgaben ergänzen im wöchentlichen Übungsbetrieb die schriftlichen Hausaufgaben zu stetigen Verteilungen. Die Studierenden nutzen sie zur Wiederholung des Vorlesungsstoffs und zur Prüfungsvorbereitung. Weitere Informationen befinden sich in separaten Handreichungen zu den einzelnen Aufgaben.

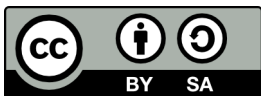
Ausblick

Das Projekt OER.Stochastik.nrw stellt weiterführende Materialien zur Verfügung.

- Das Themenpaket **Diskrete Verteilungen** beinhaltet Materialien zu diskreten Zufallsvariablen, ihren Verteilungen und Kennzahlen wie Erwartungswert und Varianz sowie zu konkreten Anwendungen bei der Modellierung diskreter Daten.
- Das Themenpaket **Zentraler Grenzwertsatz und Normalapproximation** beinhaltet Materialien zur Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung.
- Das Themenpaket **Statistik** beinhaltet Materialien zur Schätzung der bzw. zu Tests über die unbekannt Parameter einer Verteilung auf der Grundlage von Daten.

Literaturhinweise

- [1] H. Dehling, B. Haupt (2004) Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. 2. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Kapitel 8
- [2] N. Henze (2019) Stochastik: Eine Einführung mit Grundzügen der Maßtheorie. 1. Auflage. Springer Spektrum Berlin, Heidelberg. Kapitel 5.1 – 5.4
- [3] N. Henze (2021) Stochastik für Einsteiger. 13. Auflage. Springer Spektrum Berlin Heidelberg. Kapitel 31 – 33



„Handreichung für Dozierende zum Themenpaket Stetige Verteilungen“ wurde entwickelt von Riko Kelter, Jonas Lache, Daniel Meißner, Christian Müller (OER.Stochastik.nrw)

Dieses Werk ist lizenziert nach CC BY SA 4.0. Ausgenommen aus der Lizenz sind alle Logos. Der Lizenzvertrag ist hier abrufbar: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Das Werk ist online verfügbar unter: <https://www.orca.nrw>