

# Handreichung zur Aufgabe „Würfel konstruieren“

Titel der Aufgabe: Würfel konstruieren

Screenshot der anfänglichen Aufgabe:

Sei  $X$  eine Zufallsvariable, die die gewürfelte Augenzahl beim Wurf mit einem (unfairen) sechsseitigen Würfel beschreibt. Der Erwartungswert dieser Zufallsvariablen soll bei  $E(X) = 4.2$  liegen.

Geben Sie ein Beispiel für einen Würfel mit dieser Eigenschaft an, indem Sie die Verteilung von  $X$  (d. h. die Wahrscheinlichkeiten  $P(X = k)$  für  $k = 1, \dots, 6$ ) angeben. Wählen Sie die Verteilung so, dass  $P(X = k) = 0$  für höchstens ein  $k$  gilt.

Antwort:

$P(X = 1) =$

$P(X = 2) =$

$P(X = 3) =$

$P(X = 4) =$

$P(X = 5) =$

$P(X = 6) =$

Autor: [Jonas Lache](#), Ruhr-Universität Bochum

Lizenz: [CC BY-SA 4.0](#)

Zielgruppe: v. a. Studierende der Mathematik

Thema: Diskrete Verteilungen

Tags: Stochastik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik, Erwartungswert, arithmetisches Mittel, Schätzwert

Randomisierung: ja


Aufgabentyp: Umkehraufgabe, Grafik im Feedback (Art interaktives Spiel)

Beschreibung: In der Aufgabe geht es um einen unfairen sechsseitigen Würfel, dessen gewürfelte Augenzahl mit einer Zufallsvariablen  $X$  beschrieben wird. Die Studierenden sollen die Wahrscheinlichkeiten, dass die Zahlen 1 bis 6 gewürfelt werden (also  $P(X = k)$  für  $k \in \{1, \dots, 6\}$ ), so angeben, dass  $X$  einen gegebenen Erwartungswert hat und  $P(X = k) = 0$  für höchstens ein  $k$  gilt. Im Feedback der Aufgabe erscheint eine interaktive Grafik, in der die Studierenden ihren zuvor definierten Würfel virtuell werfen und die Ergebnisse in einer Häufigkeitstabelle mit absoluten und relativen Häufigkeiten sehen können. In einer entsprechenden Tabellenspalte und in einem Koordinatensystem wird zudem das arithmetische Mittel aus allen bisherigen Würfeln festgehalten. Dazu gibt es eine Aufgabe, in der die Studierenden auf Grundlage dieser Informationen einen Schätzwert für den Erwartungswert ihres Würfels angeben sollen.

Didaktische Überlegungen: Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine Umkehraufgabe, da die Studierenden – anders als gewohnt – nicht den Erwartungswert einer Zufallsvariablen berechnen, sondern zu einem gegebenen Erwartungswert eine Zufallsvariable konstruieren sollen. Dadurch ist die Aufgabe offen und besitzt unendlich viele Lösungen. Mit der Grafik im Feedback als einer Art interaktivem Spiel soll der Zusammenhang zwischen dem Erwartungswert und dem arithmetischen Mittel deutlich werden.

Enthaltene Fremdmaterialien: Diese Aufgabe bindet das Skript `stackselbstlern.js` von Michael Kallweit für die Aufgabennavigation ein.

Daten oder Links (evtl. aktualisieren): keine

**Lizenz:** „Handreichung zur Aufgabe ‚Würfel konstruieren‘“ wurde entwickelt von [Jonas Lache](#) an der Ruhr-Universität Bochum. Dieses Werk ist lizenziert unter der Lizenz „Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>. 

## Screenshots aus der Aufgabe

a) Teilaufgabe – Zufallsvariable definieren:

Sei  $X$  eine Zufallsvariable, die die gewürfelte Augenzahl beim Wurf mit einem (unfairen) sechsseitigen Würfel beschreibt. Der Erwartungswert dieser Zufallsvariablen soll bei  $E(X) = 4.2$  liegen.

Geben Sie ein Beispiel für einen Würfel mit dieser Eigenschaft an, indem Sie die Verteilung von  $X$  (d. h. die Wahrscheinlichkeiten  $P(X = k)$  für  $k = 1, \dots, 6$ ) angeben. Wählen Sie die Verteilung so, dass  $P(X = k) = 0$  für höchstens ein  $k$  gilt.

Antwort:

$P(X = 1) =$    
 $P(X = 2) =$    
 $P(X = 3) =$    
 $P(X = 4) =$    
 $P(X = 5) =$    
 $P(X = 6) =$

b) Teilaufgabe – Interaktive Grafik zum arithmetischen Mittel als Schätzwert für den Erwartungswert:

### Interaktive Anwendung

Unten finden sie eine interaktive Anwendung. Mit dieser können Sie den von Ihnen soeben konstruierten Würfel ausprobieren.

Mit einem Klick auf den Button "1x Würfeln" wird eine zufällige Zahl zwischen 1 und 6 erzeugt, wobei die Verteilung der von Ihnen angegebenen Verteilung entspricht. Sie können auch hundertmal auf einmal würfeln, indem Sie auf den Button "100x Würfeln" klicken.

In der Abbildung ist für jeden Wurf das arithmetische Mittel aus allen bisher gewürfelten Augenzahlen zu sehen. In der Tabelle finden Sie die absoluten und relativen Häufigkeiten sowie die Gesamtzahl der Würfe und das arithmetische Mittel aus allen bisher gewürfelten Augenzahlen.

Bitte probieren Sie nun diese interaktive Anwendung aus, indem Sie mehrmals würfeln und die Ergebnisse beobachten. Können Sie so einen Schätzwert für den Erwartungswert der Zufallsvariablen bestimmen, die durch Ihre vorhin angegebene Verteilung definiert wird?

**Bitte geben Sie einen Schätzwert für den Erwartungswert in das unten stehende Eingabefeld ein, den Sie mithilfe der interaktiven Anwendung ermitteln. Klicken Sie dann auf "Prüfen".**

**Aktuelles Ergebnis:**  
Bitte würfeln Sie!

Ergebnis	1	2	3	4	5	6	Anzahl Würfe	arithm. Mittel
absolute Häufigkeit	0	0	0	0	0	0		
relative Häufigkeit	0	0	0	0	0	0		

Linie für geforderten Erwartungswert ein-/ausblenden  
 Linie für arithmetisches Mittel ein-/ausblenden

Bewertung für diese Einreichung: 3,00/3,00.

Antwort: Ein Schätzwert für den Erwartungswert lautet