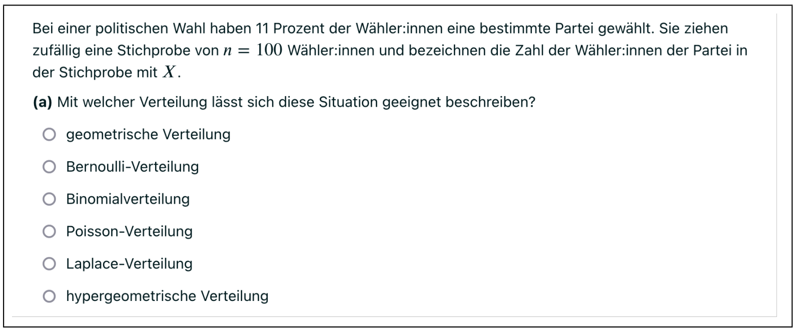
Handreichung zur Aufgabe „Wähler:innen einer Partei“

Titel der Aufgabe: Wähler:innen einer Partei

Screenshot der anfänglichen Aufgabe:



Bei einer politischen Wahl haben 11 Prozent der Wähler:innen eine bestimmte Partei gewählt. Sie ziehen zufällig eine Stichprobe von $n = 100$ Wähler:innen und bezeichnen die Zahl der Wähler:innen der Partei in der Stichprobe mit X.

(a) Mit welcher Verteilung lässt sich diese Situation geeignet beschreiben?

- geometrische Verteilung
- Bernoulli-Verteilung
- Binomialverteilung
- Poisson-Verteilung
- Laplace-Verteilung
- hypergeometrische Verteilung

Autoren: Jonas Lache und Herold Dehling, Ruhr-Universität Bochum

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Zielgruppe: Studierende der Mathematik und in Serviceveranstaltungen

Thema: Diskrete Verteilungen

Tags: Stochastik, Wahrscheinlichkeitstheorie, diskrete Zufallsvariablen, Binomialverteilung, Wahrscheinlichkeitsfunktion, Erwartungswert, Varianz

Randomisierung: ja

Aufgabentyp: tutorielle Aufgabe[1]

Beschreibung: In der Aufgabe ist die Situation gegeben, dass ein gegebener Anteil p der Wähler:innen bei einer Wahl eine bestimmte Partei gewählt hat. Es werden eine zufällige Stichprobe von $n = 100$ Personen gezogen und die Anzahl enthaltener Wähler:innen der Partei mit X bezeichnet. In der ersten Teilaufgabe soll die sinnvollste Verteilung zur Beschreibung der Zufallsvariablen X angegeben werden (Binomialverteilung). In der zweiten Teilaufgabe ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass sich höchstens vier Personen in der Stichprobe befinden, die die Partei gewählt haben. Beantworten die Studierenden diese zweite Teilaufgabe falsch, wird sie in drei Zwischenschrittsaufgaben unterteilt: Zunächst wird nach der Wahrscheinlichkeitsfunktion von X gefragt. Dann soll in einer Single-Choice-Aufgabe eine Summenformel für die Berechnung von $P(X \leq 4)$ angegeben werden. In der dritten Zwischenschrittsaufgabe sind die Teil-Wahrscheinlichkeiten $P(X = i)$ (für $i \in \{0, \ldots, 4\}$) gesucht. In der dritten und vierten Teilaufgabe der Aufgabe „Wähler:innen einer Partei“ sind der Erwartungswert bzw. die Varianz von X gesucht.

Didaktische Überlegungen: In dieser Aufgabe bearbeiten die Studierenden eine Reihe von klassischen Problemen der Stochastik, bei denen auf die Binomialverteilung abgezielt wird. Die Studierenden müssen dabei selbst erkennen, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung hier verwendet werden sollte. Die Aufgabe enthält Zwischenschritte und Hilfestellungen. Dadurch sollen die Studierenden in die Lage versetzt werden, alle Teilaufgaben und damit auch die komplexeren Aufgabenstellungen zu lösen, und die Motivation der Lernenden soll aufrecht erhalten sowie ihr Kompetenzerleben gefördert werden.

Enthaltene Fremdmaterialien: Diese Aufgabe bindet das Skript `stackselbstlern.js` von Michael Kallweit für die Aufgabennavigation ein.

Daten oder Links (evtl. aktualisieren): keine

Lizenz: „Handreichung zur Aufgabe ‚Wähler:innen einer Partei‘“ wurde entwickelt von Jonas Lache an der Ruhr-Universität Bochum. Dieses Werk ist lizenziert unter der Lizenz „Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“: http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/.

[1] Eine *tutorielle Aufgabe* ist eine digitale Aufgabe, die im Falle einer fehlerhaften Antwort in kleinere und einfachere Teilaufgaben unterteilt wird. Nach der Bearbeitung dieser Teilaufgaben werden die Lernenden zur erneuten Bearbeitung der ursprünglichen Aufgabe aufgefordert.

Screenshots aus der Aufgabe

a) Teilaufgabe – Verteilung auswählen:

Bei einer politischen Wahl haben 11 Prozent der Wähler:innen eine bestimmte Partei gewählt. Sie ziehen zufällig eine Stichprobe von $n = 100$ Wähler:innen und bezeichnen die Zahl der Wähler:innen der Partei in der Stichprobe mit X.

(a) Mit welcher Verteilung lässt sich diese Situation geeignet beschreiben?

- ○ geometrische Verteilung
- ○ Bernoulli-Verteilung
- ○ Binomialverteilung
- ○ Poisson-Verteilung
- ○ Laplace-Verteilung
- ○ hypergeometrische Verteilung

b) Teilaufgabe – $P(X \leq 4)$ angeben:

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich höchstens vier Wähler:innen der Partei in der Stichprobe befinden? Bitte geben Sie einen exakten Ausdruck oder eine Dezimalzahl ein und klicken Sie nach der Eingabe auf "Prüfen".

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit beträgt [ ].

i.) Zwischenschritt – Wahrscheinlichkeitsfunktion angeben:

(b.1) Bei der Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass sich *höchstens* vier Wähler:innen der Partei in der Stichprobe befinden, ist also die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 4)$ gesucht.

Fangen wir aber mit $P(X = k)$ an. Bitte geben Sie $P(X = k)$ in Abhängigkeit der Parameter p und n sowie der Variablen k an und klicken dann auf "Prüfen". Setzen Sie hier noch *keine* Werte für p und n ein.

Antwort: $P(X = k) =$ [ ]

ii.) Zwischenschritt – Summenformel für $P(X \leq k)$ auswählen:

(b.2) Bei der Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass sich *höchstens* vier Wähler:innen der Partei in der Stichprobe befinden, ist also die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 4)$ gesucht.

Sie wissen aus dem ersten Zwischenschritt, dass die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer binomialverteilten Zufallsvariablen $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p^k$ lautet. Setzt man die gegebenen Werte $n = 100$ und $p = 0.11$ ein, erhält man $P(X = k) = \binom{100}{k} \cdot 0.11^k \cdot 0.89^{100-k}$.

Wie kann man mithilfe dessen $P(X \leq 4)$ berechnen? Bitte klicken Sie nach dem Auswählen der Lösung auf "Prüfen".

Antwort: $P(X \leq 4) =$

- ○ $\sum_{k=1}^{4} P(X = k)$
- ○ $\sum_{k=0}^{n} P(X = k)$
- ○ $\sum_{k=1}^{n} P(X = k)$
- ○ $\sum_{k=0}^{4} P(X = k)$

iii.) Zwischenschritt – Einzelwahrscheinlichkeiten angeben:

(b.3) Bestimmen Sie nun $P(X = k)$ für alle $k = 0, \dots, 4$ und klicken dann auf "Prüfen".

Antwort:

$P(X = 0) =$

$P(X = 1) =$

$P(X = 2) =$

$P(X = 3) =$

$P(X = 4) =$

c) Teilaufgabe – Erwartungswert angeben:

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X. Klicken Sie dann auf "Prüfen".

Antwort: $\mathrm{E}(X) =$

d) Teilaufgabe – Varianz angeben:

(d) Berechnen Sie die Varianz von X. Klicken Sie dann auf "Prüfen".

Antwort: $\mathrm{Var}(X) =$