Handreichung zur Aufgabe „Summe von zwei unabhängigen Zufallsvariablen“

Titel der Aufgabe: Summe von zwei unabhängigen Zufallsvariablen

Screenshot der anfänglichen Aufgabe:

Seien X und Y unabhängige diskrete Zufallsvariablen mit Wertebereich $\{0, 1, 2, 3\}$ und der folgenden Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{6} & \text{für } k \in \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(a) Geben Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y an.

$$\Big(P(X = i, Y = j)\Big)_{i,j=0,\ldots,3} =$$

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

Autoren: Daniel Meißner und Herold Dehling, Ruhr-Universität Bochum

Zielgruppe: Studierende der Mathematik und in Serviceveranstaltungen

Thema: Diskrete Verteilungen

Tags: Stochastik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Stetige Verteilungen, Erwartungswert

Randomisierung: ja

Aufgabentyp: tutorielle Aufgabe[1]

Beschreibung: In dieser Aufgabe sind zwei unabhängige, diskrete Zufallsvariablen gegeben. Nachdem die Studierenden die gemeinsame Verteilung dieser Zufallsvariablen bestimmt haben, wird nach der Verteilung der Summe und nach der Verteilung des Maximums gefragt. Im letzten Aufgabenteil soll der Korrelationskoeffizient angegeben werden.

Didaktische Überlegungen: Die Studierenden sollen Sicherheit im Umgang mit diskreten Verteilungen erlangen und ihr Verständnis für wichtige Konzepte, wie Erwartungswert, Varianz, Faltungsformel, Kovarianz und Korrelationskoeffizient vertiefen.

Enthaltene Fremdmaterialien: keine

Daten oder Links (evtl. aktualisieren): keine

[1] Eine *tutorielle Aufgabe* ist eine digitale Aufgabe, die im Falle einer fehlerhaften Antwort in kleinere und einfachere Teilaufgaben unterteilt wird. Nach der Bearbeitung dieser Teilaufgaben werden die Lernenden zur erneuten Bearbeitung der ursprünglichen Aufgabe aufgefordert.

Screenshots aus der Aufgabe

Aufgabe – Gemeinsame Verteilung angeben:

Seien X und Y unabhängige diskrete Zufallsvariablen mit Wertebereich $\{0, 1, 2, 3\}$ und der folgenden Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{6} & \text{für } k \in \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Geben Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y an.

$$\Big(P(X = i, Y = j)\Big)_{i,j=0,\dots,3} =$$

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

i.) Zwischenschritt – Formel für gemeinsame Verteilung auswählen:

(a.1) Welche Formel für die gemeinsame Verteilung von X und Y ist korrekt?

- ○ $P(X = k, Y = l) = P(Y = l) + P(X = k)$
- ○ $P(X = k, Y = l) = P(X = k) \cdot P(Y = l)$
- ○ $P(X = k, Y = l) = P(X = l) \cdot P(Y = k)$
- ○ $P(X = k, Y = l) = P(Y = k) + P(X = l)$

ii.) Zwischenschritt – Ein Matrix-Eintrag angeben:

(a.2) Wir wollen nun den (2,2) Eintrag in der Matrix aus Aufgabenteil a) bestimmen. Dieser Eintrag steht für die Wahrscheinlichkeit $P(X = 1, Y = 1)$.

$P(X = 1, Y = 1) =$ ______

Aufgabe – Verteilung von $X + Y$ angeben:

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $X + Y$.

k	0	1	2	3	4	5	6
$p_{X+Y}(k)$							

i.) Zwischenschritt – Mögliche Realisierung für $X + Y = 3$ angeben:

(b.1) Wir wollen die möglichen Realisierungen von X und Y betrachten, die zum Ereignis $\{X + Y = 3\}$ führen. Geben Sie dazu die Menge aller Paare (x, y) an, für die $x + y = 3$ gilt. Beispielsweise so: `{[5,3], [1,5]}`

Antwort: ______

ii.) Zwischenschritt – $P(X + Y = 3)$ angeben:

(b.2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X + Y = 3)$.

$P(X + Y = 3) =$ ______

Aufgabe – Verteilung von $M := \max\{X, Y\}$ angeben:

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $M := \max\{X, Y\}$.

k	0	1	2	3
$P(M = k)$				

i.) Zwischenschritt – Mögliche Realisierung für $M = 2$ angeben:

(c.1) Wir wollen die möglichen Realisierungen von X und Y betrachten, die zum Ereignis $\{\max\{X, Y\} = 2\}$ führen. Geben Sie dazu die Menge aller Paare (x, y) an, für die $\max\{x, y\} = 2$ gilt. Beispielsweise so: `{[5,3], [1,5]}`

Antwort:

ii.) Zwischenschritt – $P(M = 2)$ angeben:

(c.2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(M = 2)$.

$P(M = 2) =$

Aufgabe – Korrelationskoeffizient angeben:

(d) Bestimmen Sie den Korrelationskoefizienten $\mathrm{corr}(X, Y)$.

$\mathrm{corr}(X, Y) =$