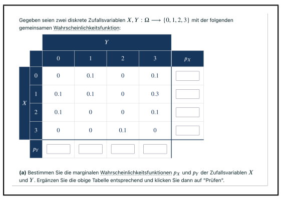
Handreichung zur Aufgabe „Gemeinsame Verteilungen“

Titel der Aufgabe:	Gemeinsame Verteilungen
Screenshot der anfänglichen Aufgabe:	
Autoren:	Jonas Lache und Herold Dehling, Ruhr-Universität Bochum
Lizenz:	CC BY-SA 4.0
Zielgruppe:	Studierende der Mathematik und in Serviceveranstaltungen
Thema:	Diskrete Verteilungen
Tags:	Stochastik, Wahrscheinlichkeitstheorie, gemeinsame Verteilungen, diskrete Zufallsvariablen, Erwartungswert, Varianz, Kovarianz, Korrelation, Unabhängigkeit
Randomisierung:	nein
Aufgabentyp:	tutorielle Aufgabe[1]
Beschreibung:	In der Aufgabe sind zwei Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \{0, 1, 2, 3\}$ mit ihrer gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktion (als Tabelle) gegeben. In der ersten Teilaufgabe soll die Tabelle um die marginalen Wahrscheinlichkeitsfunktionen p_X und p_Y ergänzt werden. In der zweiten Teilaufgabe ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $X + Y$ gesucht, wobei diese ebenfalls in Form einer Tabelle anzugeben ist. Können die Studierenden diese Teilaufgabe nicht beantworten, wird sie in drei Zwischenschrittsaufgaben unterteilt: Zunächst soll der Wertebereich von $X + Y$ in einer Single-Choice-Aufgabe ausgewählt werden. Dann sollen exemplarisch alle Tupel angegeben werden, deren Summe 4 ergibt, bevor im dritten Zwischenschritt $p_{X+Y}(4)$ gesucht ist. In der dritten Teilaufgabe der Aufgabe „Gemeinsame Verteilungen“ sollen der Erwartungswert und in der vierten Teilaufgabe die Varianz von X und Y angegeben werden. Kann die Varianz von den Studierenden nicht korrekt bestimmt werden, wird eine Zwischenschrittsaufgabe bereitgestellt, in der $\mathrm{E}(X^2)$ als Teilergebnis von $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$ gesucht ist. In der fünften Teilaufgabe soll die Kovarianz von X und Y angegeben werden. Hier ist eine Zwischenschrittsaufgabe eingebaut, in der $\mathrm{E}(X \cdot Y)$ angegeben werden soll. Die sechste Teilaufgabe thematisiert den Korrelationskoeffizienten von X uns Y und in der siebten und letzten Teilaufgabe sollen die Studierenden entscheiden, ob die beiden Zufallsvariablen unabhängig sind.
Didaktische Überlegungen:	In dieser Aufgabe bearbeiten die Studierenden eine Reihe von Problemen zu gemeinsamen Verteilungen. An einem konkreten Beispiel bestimmen sie dabei einige verschiedene Kenngrößen und bekommen dabei Zwischenschritte und Hilfestellungen. Dadurch sollen die Studierenden in die Lage versetzt werden, alle Teilaufgaben und damit auch die komplexeren Aufgabenstellungen zu lösen, und die Motivation der Lernenden soll aufrecht erhalten sowie ihr Kompetenzerleben gefördert werden.
Enthaltene Fremdmaterialien:	Diese Aufgabe bindet das Skript `stackselbstlern.js` von Michael Kallweit für die Aufgabennavigation ein.
Daten oder Links (evtl. aktualisieren):	keine

[1] Eine *tutorielle Aufgabe* ist eine digitale Aufgabe, die im Falle einer fehlerhaften Antwort in kleinere und einfachere Teilaufgaben unterteilt wird. Nach der Bearbeitung dieser Teilaufgaben werden die Lernenden zur erneuten Bearbeitung der ursprünglichen Aufgabe aufgefordert.

Screenshots aus der Aufgabe

a) Teilaufgabe – Marginale Wahrscheinlichkeitsfunktionen angeben:

Gegeben seien zwei diskrete Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ mit der folgenden gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktion:

		Y				
		0	1	2	3	p_X
X	0	0	0.1	0	0.1	
	1	0.1	0.1	0	0.3	
	2	0.1	0	0	0.1	
	3	0	0	0.1	0	
	p_Y					

(a) Bestimmen Sie die marginalen Wahrscheinlichkeitsfunktionen p_X und p_Y der Zufallsvariablen X und Y. Ergänzen Sie die obige Tabelle entsprechend und klicken Sie dann auf "Prüfen".

b) Teilaufgabe – Wahrscheinlichkeitsfunktion von $X + Y$ angeben:

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $X + Y$. Füllen Sie dazu die folgende Tabelle aus:

k	0	1	2	3	4	5	6
$p_{X+Y}(k)$							

i.) Zwischenschritt – Wertebereich von $X + Y$ auswählen:

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $X + Y$.

Zwischenschritt 1:
Zur Erinnerung: Die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $X + Y$ an der Stelle k entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass die Summe von X und Y gerade k ist. Um p_{X+Y} anzugeben, muss zunächst der Wertebereich von $X + Y$ betrachtet werden.

Was ist der Wertebereich von $X + Y$, das heißt welche Werte können für $X + Y$ überhaupt herauskommen?

- ○ $\{1, \dots, 6, 7\}$
- ○ $[1, 6]$
- ○ $\{0, 1, 2, 3\}$
- ○ $\{0, 1, \dots, 6\}$
- ○ $(0, 7)$

ii.) Zwischenschritt – alle Tupel mit Summe 4 angeben:

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $X + Y$.

Zwischenschritt 2:
Sie wissen nun also, dass $X + Y$ den Wertebereich $\{0, 1, \dots, 6\}$ hat. Jetzt müssen Sie sich überlegen, welche Summe bei welchen Kombinationen von X und Y heraus kommt.

Bitte tun Sie dies nun exemplarisch: Geben Sie alle Tupel von Werten von X und Y an, deren Summe 4 ist.

Antwort: $\{(k, l) \in \{0, 1, 2, 3\}^2 \mid k + l = 4\} =$ [ ]

iii.) Zwischenschritt – $p_{X+Y}(4)$ angeben:

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $X + Y$.

Zwischenschritt 3:
Sie wissen nun also, dass $X + Y$ den Wertebereich $\{0, 1, \dots, 6\}$ hat und kennen alle Tupel von Werten von X und Y, deren Summe 4 ist (zur Erinnerung: dies sind $[1, 3]$, $[2, 2]$, $[3, 1]$).

Geben Sie nun $p_{X+Y}(4)$ an.

Antwort: $p_{X+Y}(4) =$ [ ]

c) Teilaufgabe – $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{E}(Y)$ angeben:

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X und Y. Klicken Sie nach der Eingabe auf "Prüfen".

Antwort:

$\mathrm{E}(X) =$ [ ]

$\mathrm{E}(Y) =$ [ ]

d) Teilaufgabe – $\mathrm{Var}(X)$ und $\mathrm{Var}(Y)$ angeben:

(d) Berechnen Sie die Varianz von X und Y. Klicken Sie nach der Eingabe auf "Prüfen".

Antwort:

$\mathrm{Var}(X) =$ [ ]

$\mathrm{Var}(Y) =$ [ ]

i.) Zwischenschritt – $\mathrm{E}(X^2)$ angeben:

(d) Berechnen Sie die Varianz von X und Y

Zwischenschritt:
Im Tipp haben Sie gesehen, dass die Formel für die Varianz $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$ lautet. Da Sie $\mathrm{E}(X)$ bereits kennen, besteht nun die Hauptarbeit darin, $\mathrm{E}(X^2)$ zu berechnen. Bitte tun Sie dies nun und klicken nach der Eingabe auf "Prüfen".

Antwort: $\mathrm{E}(X^2) =$ [ ]

e) Teilaufgabe – Kovarianz von X und Y angeben:

(e) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y. Klicken Sie nach der Eingabe auf "Prüfen".

Antwort: $\mathrm{Cov}(X, Y) =$ [ ]

i.) Zwischenschritt – $\mathrm{E}(X \cdot Y)$ angeben:

(e) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y.

Zwischenschritt:
Im Tipp haben Sie gesehen, dass die Formel für die Kovarianz $\mathrm{Var}(X, Y) = \mathrm{E}(X \cdot Y) - \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)$ lautet. Da Sie $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{E}(Y)$ bereits kennen, besteht nun die Hauptarbeit darin, $\mathrm{E}(X \cdot Y)$ zu berechnen. Bitte tun Sie dies nun und klicken Sie nach der Eingabe auf "Prüfen".

Antwort: $\mathrm{E}(X \cdot Y) =$

f) Teilaufgabe – Korrelationskoeffizient von X und Y angeben:

(f) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten von X und Y. Klicken Sie nach der Eingabe auf "Prüfen".

Antwort: $\rho_{X,Y} =$

g) Teilaufgabe – Entscheiden, ob X und Y unabhängig sind:

(g) Sind X und Y unabhängig? Wählen Sie Ihre Antwort aus und klicken Sie dann auf "Prüfen".

Antwort: Sie sind (Nicht beantwortet)