

Handreichung zur Aufgabe „Chebychev-Ungleichung“

Titel der Aufgabe: Chebychev-Ungleichung

Screenshot der anfänglichen Aufgabe:

Saatkörner einer bestimmten Sorte keimen unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.2$. Insgesamt werden $n = 2000$ Saatkörner gesät. Die zufällige Anzahl der davon gekeimten Saatkörner wird durch eine Zufallsvariable X beschrieben.

(a) Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable X ?

- Laplace-Verteilung
- Binomialverteilung
- Geometrische Verteilung
- Bernoulli-Verteilung

Autoren: Axel Bücher, Peter Kern, Christian Müller, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Zielgruppe: Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematik, Physik, Informatik, Ingenieurwissenschaften, Wirtschaftswissenschaften

Thema: Diskrete Verteilungen

Tags: Stochastik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Binomialverteilung, Erwartungswert, Varianz, Chebychev-Ungleichung

Randomisierung: ja

Aufgabentyp: mehrteilige Aufgabe

Beschreibung: In der Aufgabe sollen die Studierenden eine Binomial-Wahrscheinlichkeit mithilfe der Chebychev-Ungleichung nach unten abschätzen. Zuerst identifizieren sie die Binomialverteilung als korrekte Modellierung des Sachkontextes und berechnen deren Erwartungswert und Varianz. Anschließend formen Sie das Ereignis auf die Form der Chebychev-Ungleichung um und wenden diese zur Abschätzung der Wahrscheinlichkeit an.

Didaktische Überlegungen: Die Studierenden werden Schritt für Schritt angeleitet, eine Wahrscheinlichkeit mithilfe der Chebychev-Ungleichung abzuschätzen. Dabei kombinieren sie verschiedenes Vorwissen miteinander, um die Aufgabe zu lösen: die stochastische Modellierung mit der Binomialverteilung, die Berechnung von Erwartungswert und Varianz einer Binomialverteilung sowie den Umgang mit Ungleichungen, Beträgen und Gegenwahrscheinlichkeiten.

Enthaltene Fremdmaterialien: Diese Aufgabe bindet das Skript `stackselbstlern.js` von Michael Kallweit für die Aufgabennavigation ein.

Daten oder Links (evtl. aktualisieren): keine

Lizenz: „Handreichung zur Aufgabe ‚Chebychev-Ungleichung‘“ wurde entwickelt von [Christian Müller](#) an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf. Dieses Werk ist lizenziert unter der Lizenz „Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>. 

Screenshots aus der Aufgabe

(a) Teilaufgabe – passende Verteilung auswählen:

Saatkörner einer bestimmten Sorte keimen unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.2$. Insgesamt werden $n = 2000$ Saatkörner gesät. Die zufällige Anzahl der davon gekeimten Saatkörner wird durch eine Zufallsvariable X beschrieben.

(a) Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable X ?

- Laplace-Verteilung
- Binomialverteilung
- Geometrische Verteilung
- Bernoulli-Verteilung

(b) Teilaufgabe – Erwartungswert und Varianz berechnen:

(b) Die Zufallsvariable X hat eine $\text{Bin}(2000, 0.2)$ -Verteilung. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .

Der Erwartungswert von X ist $E(X) =$.

Die Varianz von X ist $\text{Var}(X) =$.

(c) Teilaufgabe – Ereignis umschreiben:

(c) Schreiben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(250 < X < 550)$ Schritt für Schritt so um, dass die Chebychev-Ungleichung anwendbar wird: Subtrahieren Sie zuerst auf allen Seiten der Ungleichungskette, die das Ereignis beschreibt, den Erwartungswert von X , den Sie in der vorherigen Teilaufgabe berechnet haben. Fassen Sie anschließend die Ungleichungskette zu einer Betragsungleichung zusammen. Gehen Sie zuletzt zur Gegenwahrscheinlichkeit über, damit das Ereignis durch ein \geq -Zeichen statt ein $<$ -Zeichen beschrieben wird.

Beim Klick auf "Prüfen" bekommen Sie erst dann ein Feedback, wenn Sie alle Eingabefelder ausgefüllt haben.

$$\begin{aligned} &P(250 < X < 550) \\ &= P(\text{ } < X - E(X) < \text{ }) \\ &= P(|X - E(X)| < \text{ }) \\ &= 1 - P(|X - E(X)| \geq \text{ }) \end{aligned}$$

(d) Teilaufgabe – Wahrscheinlichkeit abschätzen:

(d) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 250 und weniger als 550 Saatkörner keimen, nach unten ab, indem Sie mit der Chebychev-Ungleichung eine reelle Zahl berechnen, sodass $P(250 < X < 550) \geq$.