

# Handreichung für Dozierende zum Themenpaket Diskrete Verteilungen

OER.Stochastik.nrw

## Materialien in diesem Paket

2 Videos, 3 Interaktive Anwendungen, 13 Aufgaben

## Fachbereiche

Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematik, Physik, Informatik, Ingenieurwissenschaften, Wirtschaftswissenschaften, Pharmazie, Humanmedizin und Gesundheitswissenschaften

## Kurzbeschreibung der Materialien

### Video: Der Poissonsche Grenzwertsatz und die Poisson-Approximation

Anhand eines anschaulichen Beispiels wird das Konvergenzverhalten der Binomialverteilung gegen die Poisson-Verteilung motiviert. Der Poissonsche Grenzwertsatz wird mathematisch präzise formuliert, jedoch nicht bewiesen. Die Poisson-Approximation wird erklärt und mit einem Rechenbeispiel sowie grafisch illustriert.

### Video: Elementare Momente

Die Begriffe Erwartungswert und Varianz werden motiviert und die definierenden Formeln grafisch erklärt. Das Video behandelt dabei nur den diskreten Fall. Die Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz unter Verschiebung bzw. Skalierung der Zufallsvariablen werden sowohl grafisch visualisiert als auch rechnerisch hergeleitet.

### Interaktive Anwendung: Die Poisson-Approximation

Für verschiedene Kombinationen ihrer Parameter kann der Unterschied zwischen den Dichten von Binomial- und Poisson-Verteilung interaktiv erkundet werden. Ein Beobachtungsauftrag leitet die eigenständige Erkundung der Grafik an. Der Beweis des Poissonschen Grenzwertsatzes liefert eine mathematische Erklärung für die beobachteten Zusammenhänge.

### Interaktive Anwendung: Minimalitätseigenschaft des Erwartungswerts

Bei der Binomialverteilung wird in Abhängigkeit vom auf der horizontalen Achse eingestellten Wert  $a$  die gewichtete Summe der quadratischen Abweichungen von  $a$  als Maß für die Streuung visualisiert. Wird für  $a$  exakt der Erwartungswert eingestellt, wird die Streuung minimal. Dies motiviert die Definition der Varianz als mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert.

**Interaktive Anwendung: Die geometrische Verteilung**

In dieser interaktiven Anwendung verändern die Studierenden den Parameter einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen und beobachten die resultierenden Veränderungen ihrer Wahrscheinlichkeitsfunktion, des Erwartungswerts und der Varianz.

**Aufgabe: Wähler:innen einer Partei**

In dieser Aufgabe soll mithilfe der Binomialverteilung eine Wahrscheinlichkeit berechnet und der Erwartungswert sowie die Varianz einer binomialverteilten Zufallsvariablen angegeben werden.

**Aufgabe: Sterbewahrscheinlichkeit**

In dieser Aufgabe sollen zwei Wahrscheinlichkeiten berechnet und der Erwartungswert sowie die Varianz einer Zufallsvariablen angegeben werden. Die Aufgabe kann sowohl mit der Binomial- als auch mit der Poisson-Verteilung gelöst werden.

**Aufgabe: Versicherungsvertreterin**

In dieser Aufgabe soll mithilfe der Poisson-Verteilung eine Wahrscheinlichkeit berechnet werden.

**Aufgabe: Nachrichtenkanal**

In dieser Aufgabe soll mithilfe der Binomialverteilung eine Wahrscheinlichkeit berechnet und der Erwartungswert sowie die Varianz einer binomialverteilten Zufallsvariablen angegeben werden.

**Aufgabe: Verkehrstote (diskrete Zufallsvariablen)**

In dieser Aufgabe geht es um die Modellierung von Daten mit der Poisson-Verteilung. Dabei sind Schätzwerte für den Parameter der Verteilung, den Erwartungswert sowie die Varianz der Verteilung und für eine Wahrscheinlichkeit gesucht.

**Aufgabe: Verkehrstote (Daten selbst recherchieren)**

Diese Aufgabe ist ähnlich der Aufgabe Verkehrstote (diskrete Zufallsvariablen). Die Besonderheit ist hier, dass die Studierenden zu Beginn der Aufgabe selbst Daten recherchieren sollen.

**Aufgabe: Brettspiel**

In dieser Aufgabe soll mithilfe der geometrischen Verteilung eine Wahrscheinlichkeit berechnet und der Erwartungswert sowie die Varianz einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen angegeben werden.

**Aufgabe: Gemeinsame Verteilungen**

In dieser Aufgabe geht es um zwei diskrete Zufallsvariablen  $X, Y$  und ihre gemeinsame Verteilung. Nacheinander sollen die marginalen Wahrscheinlichkeitsfunktionen, die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $X + Y$ , der Erwartungswert sowie die Varianz beider Zufallsvariablen, ihre Kovarianz und ihr Korrelationskoeffizient angegeben werden. Zuletzt soll entschieden werden, ob die Zufallsvariablen unabhängig sind.

### **Aufgabe: Würfel konstruieren**

In dieser Aufgabe geht es um einen unfairen Würfel. Zunächst sollen die Wahrscheinlichkeiten, dass die Zahlen 1 bis 6 gewürfelt werden, so bestimmt werden, dass der Würfel bestimmte Eigenschaften erfüllt. Anschließend soll durch das Durchführen eines Zufallsexperiments ein Schätzwert empirisch ermittelt werden.

### **Aufgabe: Poisson-Approximation**

In der Aufgabe sollen die Studierenden eine Binomial-Wahrscheinlichkeit zuerst exakt berechnen und anschließend mit der Poisson-Approximation approximativ berechnen. Außerdem wird die Größenordnung des Approximationsfehlers abgefragt. Nachdem die Aufgabe richtig gelöst wurde, können die Studierenden mit einer interaktiven Anwendung erkunden, wie sich der Approximationsfehler ändert, wenn die Parameter  $n$  und  $p$  der Binomialverteilung verändert werden.

### **Aufgabe: Chebychev-Ungleichung**

In der Aufgabe sollen die Studierenden eine Binomial-Wahrscheinlichkeit mithilfe der Chebychev-Ungleichung nach unten abschätzen. Zuerst identifizieren sie die Binomialverteilung als korrekte Modellierung des Sachkontextes und berechnen deren Erwartungswert und Varianz. Anschließend formen Sie das Ereignis auf die Form der Chebychev-Ungleichung um und wenden diese zur Abschätzung der Wahrscheinlichkeit an.

### **Aufgabe: Wahrscheinlichkeitsmaß ganze Zahlen**

Die Wahrscheinlichkeiten von Elementarereignissen sollen bei Kenntnis der Wahrscheinlichkeiten anderer Ereignisse bestimmt werden.

### **Aufgabe: Summe von zwei unabhängigen Zufallsvariablen**

In dieser Aufgabe sind zwei unabhängige, diskrete Zufallsvariablen gegeben. Nachdem die Studierenden die gemeinsame Verteilung dieser Zufallsvariablen bestimmt haben, wird nach der Verteilung der Summe und nach der Verteilung des Maximums gefragt. Im letzten Aufgabenteil soll der Korrelationskoeffizient angegeben werden.

## **Schlagwörter**

*Mit einem \* markierte Begriffe werden als bekannt vorausgesetzt.*

\*Wahrscheinlichkeitsraum, diskrete Zufallsvariable, (gemeinsame) Zählerdichte, (gemeinsame) Wahrscheinlichkeitsfunktion, Verteilungsfunktion, Marginal-/Randverteilung, diskrete Gleichverteilung, Binomialverteilung, Poisson-Verteilung, geometrische Verteilung, Poissonscher Grenzwertsatz, Poisson-Approximation, exakte und approximative Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, grafische Visualisierung der Poisson-Approximation, Momente von Zufallsvariablen, Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung, Chebychev-Ungleichung

## **Einsatzszenarien**

Das Themenpaket ist modular aufgebaut, alle Materialien können einzeln und unabhängig voneinander eingesetzt werden.

- Die Videos bieten einen motivierenden Einstieg in das Thema diskrete Verteilungen. Sie werden parallel zum entsprechenden Vorlesungsabschnitt gezeigt oder den Studierenden zur eigenständigen Vorbereitung im Flipped Classroom Szenario zur Verfügung gestellt.
- Mit den interaktiven Anwendungen erkunden die Studierenden eigenständig und mithilfe von Beobachtungsaufträgen verschiedene diskrete Verteilungen. Sie wiederholen und vertiefen auf diese Weise den Vorlesungsstoff. Die interaktiven Anwendungen können auch direkt in der Vorlesung gezeigt werden.
- Die Aufgaben ergänzen im wöchentlichen Übungsbetrieb die schriftlichen Hausaufgaben zu diskreten Verteilungen. Die Studierenden nutzen sie zur Wiederholung des Vorlesungsstoffs und zur Prüfungsvorbereitung. Weitere Informationen befinden sich in separaten Handreichungen zu den einzelnen Aufgaben.

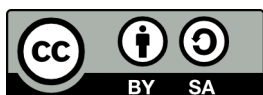
## Ausblick

Das Projekt OER.Stochastik.nrw stellt weiterführende Materialien zur Verfügung.

- Das Themenpaket **Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit** beinhaltet Materialien zu zwei zentralen Begriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Interpretation und Anwendungen.
- Das Themenpaket **Stetige Verteilungen** gibt eine Einführung in die Theorie dichteverteilter Zufallsvariablen und deren Anwendung bei der Modellierung stetiger Daten.
- Das Themenpaket **Zentraler Grenzwertsatz und Normalapproximation** beinhaltet Materialien zur Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung.

## Literaturhinweise

- [1] H. Dehling, B. Haupt (2004) Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. 2. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Kapitel 4, 5, 6.1
- [2] N. Henze (2019) Stochastik: Eine Einführung mit Grundzügen der Maßtheorie. 1. Auflage. Springer Spektrum Berlin, Heidelberg. Kapitel 4.1 – 4.4
- [3] N. Henze (2021) Stochastik für Einsteiger. 13. Auflage. Springer Spektrum Berlin Heidelberg. Kapitel 3, 12, 13, 17, 18, 20 – 22, 24



„Handreichung für Dozierende zum Themenpaket Diskrete Verteilungen“ wurde entwickelt von Riko Kelter, Jonas Lache, Daniel Meißner, Christian Müller (OER.Stochastik.nrw)

Dieses Werk ist lizenziert nach CC BY SA 4.0. Ausgenommen aus der Lizenz sind alle Logos. Der Lizenzvertrag ist hier abrufbar: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Das Werk ist online verfügbar unter: <https://www.orca.nrw>