Handreichung zur Aufgabe „Unabhängigkeit von diskreten Zufallsvariablen“

Titel der Aufgabe:	Unabhängigkeit von diskreten Zufallsvariablen
Screenshot der anfänglichen Aufgabe:	Sei P das diskrete Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Grundraum $\Omega = \{1,2,3\}^2$, dessen Zähldichte $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ für alle $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ in der folgenden Tabelle gegeben ist.

p_ω	$\omega_2 = 1$	$\omega_2 = 2$	$\omega_2 = 3$
$\omega_1 = 1$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$
$\omega_1 = 2$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$
$\omega_1 = 3$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

Außerdem seien $X, Y : \Omega \longrightarrow \Omega' = \{1,2,3\}$ mit $X(\omega) = \omega_1$ und $Y(\omega) = \omega_2$ zwei Zufallsvariablen, die auf die erste bzw. zweite Komponente projizieren.

(a) Berechnen Sie die Randverteilungen P_X und P_Y, d.h. berechnen Sie für $k \in \{1,2,3\}$ die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ und $P(Y = k)$.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$P(X = k)$			
$P(Y = k)$			

Autoren:	Axel Bücher, Peter Kern, Christian Müller, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Lizenz:	CC BY-SA 4.0
Zielgruppe:	Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematik, Physik, Informatik, Ingenieurwissenschaften, Wirtschaftswissenschaften, Pharmazie
Thema:	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit
Tags:	Stochastik, Wahrscheinlichkeitstheorie, gemeinsame Verteilung, Randverteilung, Randdichte, Produktmaß, Unabhängigkeit von Zufallsvariablen
Randomisierung:	ja
Aufgabentyp:	mehrteilige Aufgabe
Beschreibung:	In der Aufgabe wird zufällig eine bivariate Zähldichte generiert. Die Studierenden sollen dann die Randdichten der Projektionsabbildungen und die Dichte des Produktmaßes berechnen. Basierend darauf sollen sie entscheiden, ob die Zufallsvariablen unabhängig sind oder nicht.
Didaktische Überlegungen:	Die Studierenden werden Schritt für Schritt angeleitet, zwei diskrete Zufallsvariablen auf Unabhängigkeit zu überprüfen. Sie lernen, aus einer gegebenen bivariaten Zähldichte die Randdichten und aus diesen dann die Produktdichte zu berechnen. Durch Vergleich der Produktdichte mit der ursprünglich gegebenen Zähldichte entscheiden sie, ob tatsächlich Unabhängigkeit vorliegt.
Enthaltene Fremdmaterialien:	Diese Aufgabe bindet das Skript `stackselbstlern.js` von Michael Kallweit für die Aufgabennavigation ein.
Daten oder Links (evtl. aktualisieren):	keine

Lizenz: „Handreichung zur Aufgabe ‚Unabhängigkeit von diskreten Zufallsvariablen‘“ wurde entwickelt von Christian Müller an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf. Dieses Werk ist lizenziert unter der Lizenz „Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“: http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/.

Screenshots aus der Aufgabe

(a) Teilaufgabe – Randdichten berechnen:

Sei P das diskrete Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Grundraum $\Omega = \{1,2,3\}^2$, dessen Zähldichte $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ für alle $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ in der folgenden Tabelle gegeben ist.

p_ω	$\omega_2 = 1$	$\omega_2 = 2$	$\omega_2 = 3$
$\omega_1 = 1$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$
$\omega_1 = 2$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$
$\omega_1 = 3$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

Außerdem seien $X, Y : \Omega \longrightarrow \Omega' = \{1,2,3\}$ mit $X(\omega) = \omega_1$ und $Y(\omega) = \omega_2$ zwei Zufallsvariablen, die auf die erste bzw. zweite Komponente projizieren.

(a) Berechnen Sie die Randverteilungen P_X und P_Y, d.h. berechnen Sie für $k \in \{1,2,3\}$ die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ und $P(Y = k)$.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$P(X = k)$			
$P(Y = k)$			

(b) Teilaufgabe – Produktdichte berechnen:

(b) Berechnen Sie die Verteilung des Produktmaßes $P_X \otimes P_Y$, d.h. berechnen Sie für $k, l \in \{1,2,3\}$ die Wahrscheinlichkeiten $(P_X \otimes P_Y)(\{(k,l)\}) = P(X = k)P(Y = l)$.

	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$
$k = 1$			
$k = 2$			
$k = 3$			

Zur Erinnerung: In (a) haben Sie die folgenden Randverteilungen von X und Y berechnet.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
$P(Y = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(c) Teilaufgabe – auf Unabhängigkeit entscheiden:

(c) Entscheiden Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y P-stochastisch unabhängig sind.

Zur Erinnerung: In (b) haben Sie die folgende Verteilung des Produktmaßes $P_X \otimes P_Y$ berechnet.

	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$
$k = 1$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$
$k = 2$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$
$k = 3$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

X und Y sind (Nicht beantwortet) .