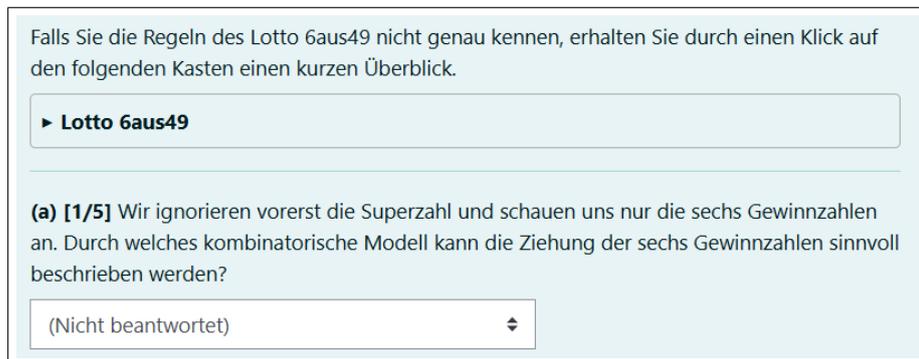


Handreichung zur Aufgabe „Lotto 6aus49“

Titel der Aufgabe: Lotto 6aus49

Screenshot der anfänglichen Aufgabe:



Autoren: [Axel Bücher](#), [Peter Kern](#), [Christian Müller](#), Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Lizenz: [CC BY-SA 4.0](#)

Zielgruppe: Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematik, Physik, Informatik, Ingenieurwissenschaften, Wirtschaftswissenschaften, Pharmazie, Humanmedizin und Gesundheitswissenschaften

Thema: Kombinatorik

Tags: Stochastik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Kombinatorik, Urnenmodell, hypergeometrische Verteilung

Randomisierung: ja

Aufgabentyp: mehrteilige Aufgabe

Beschreibung: In der Aufgabe sollen die Studierenden verschiedene Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten für das Lottospiel 6aus49 berechnen. Dazu wird die Modellierung mit einem kombinatorischen Modell und der hypergeometrischen Verteilung schrittweise aufgebaut. Weiterführende Aufgabenteile berücksichtigen zusätzlich die Ziehung der Superzahl und das Lottospiel mit System.

Didaktische Überlegungen: Die Studierenden untersuchen die Erfolgchancen beim Lottospiel 6aus49 mit den Methoden der elementaren Stochastik. Die erhaltenen Wahrscheinlichkeiten können mit den auf der offiziellen Lotto-Webseite angegebenen verglichen werden. Ebenso können die beiden Lösungswege – mit einem kombinatorischen Modell und mit der daraus abgeleiteten hypergeometrischen Verteilung – miteinander verglichen werden. Basierend auf den Ergebnissen der Aufgabe können die Studierenden die Teilnahme an diesem Glücksspiel kritisch diskutieren.

Enthaltene Fremdmaterialien: Diese Aufgabe bindet das Skript `stackselbstlern.js` von Michael Kallweit für die Aufgabennavigation ein.

Daten oder Links (evtl. aktualisieren): keine

Lizenz: „Handreichung zur Aufgabe ‚Lotto 6aus49‘“ wurde entwickelt von [Christian Müller](#) an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf. Dieses Werk ist lizenziert unter der Lizenz „Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>. 

Screenshots aus der Aufgabe

(a1) Teilaufgabe – passendes kombinatorisches Modell auswählen:

Falls Sie die Regeln des Lotto 6aus49 nicht genau kennen, erhalten Sie durch einen Klick auf den folgenden Kasten einen kurzen Überblick.

▼ Lotto 6aus49

Beim Lotto 6aus49 werden auf einem Lottoschein sechs verschiedene Zahlen in einem Spielfeld mit den Zahlen von 1 bis 49 angekreuzt, die letzte Ziffer der siebenstelligen Spielscheinnummer ist die persönliche Superzahl. Bei der Ziehung der Lottozahlen werden dann aus einer Trommel nacheinander sechs verschiedene Gewinnzahlen $z_1, \dots, z_6 \in \{1, \dots, 49\}$ und anschließend aus einer separaten Trommel noch eine Superzahl $s \in \{0, \dots, 9\}$ gezogen. Die der Größe nach sortierten Gewinnzahlen zusammen mit der Superzahl bilden das Ziehungsergebnis. Je nachdem, wie viele der in der Ziehung gezogenen Zahlen mit den eigenen Zahlen auf dem Lottoschein übereinstimmen, winkt ein Geldgewinn.

Mit Hilfe der Superzahl werden insgesamt neun verschiedene Gewinnklassen unterschieden. Die niedrigste Gewinnklasse 9 erreicht man mit 2 richtigen Gewinnzahlen und der richtigen Superzahl, die Gewinnklasse 8 mit 3 richtigen Gewinnzahlen, aber der falschen Superzahl, usw. bis zur Gewinnklasse 1 mit 6 richtigen Gewinnzahlen und der richtigen Superzahl, bei der man den Jackpot knackt.

Lotto kann auch mit System gespielt werden. Bei einem sogenannten Lotto-Vollsystem können pro Spielfeld mehr als sechs Zahlen angekreuzt werden, aus denen dann alle möglichen Spielreihen bestehend aus genau sechs der angekreuzten Zahlen gebildet werden. In Nordrhein-Westfalen sind die Vollsysteme 007, 008, 009 und 010 spielbar, in anderen Bundesländern sind auch die Vollsysteme 011 und 012 möglich. Hier können pro Spielfeld also zwischen 7 und 12 Zahlen auf einmal angekreuzt werden und alle Spielreihen, die sich aus genau 6 dieser Zahlen bilden lassen, werden gleichzeitig gespielt.

(a) [1/5] Wir ignorieren vorerst die Superzahl und schauen uns nur die sechs Gewinnzahlen an. Durch welches kombinatorische Modell kann die Ziehung der sechs Gewinnzahlen sinnvoll beschrieben werden?

(Nicht beantwortet)

(a2) Teilaufgabe – Parameter des Modells bestimmen:

(a) [2/5] Zuerst müssen wir die Parameter N und n des kombinatorischen Modells identifizieren. Hierbei gibt N an, wie viele Kugeln bei Ziehungsbeginn in der Urne bzw. Trommel sind, und n ist die Anzahl der Ziehungen. Welche Werte haben N und n also bei der Ziehung der Gewinnzahlen im Lotto 6aus49?

(1) Es wird aus $N =$ Kugeln gezogen.

(2) Es wird $n =$ mal gezogen.

(a3) Teilaufgabe – Anzahl der möglichen Ergebnisse berechnen:

(a) [3/5] Mit den Werten $N = 49$ und $n = 6$ können wir nun die Mächtigkeit des Grundraums berechnen.

Das Modell Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge als Grundraum hat die Mächtigkeit .

(a4) Teilaufgabe – Anzahl der günstigen Ergebnisse berechnen:

(a) [4/5] Die Wahrscheinlichkeit, dass eine konkrete Zahlenfolge, sagen wir $\{22, 23, 25, 29, 47, 48\}$, als Gewinnzahlen gezogen wird, berechnet sich in einem Laplace-Modell bekanntlich als Quotient aus der Anzahl der günstigen Ergebnisse und der Mächtigkeit des Grundraums. Letztere haben wir in der vorherigen Aufgabe berechnet. Wir müssen jetzt also noch die günstigen Ergebnisse zählen.

Das Ereignis, dass $\{22, 23, 25, 29, 47, 48\}$ die 6 Richtigen sind, besteht im Modell Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge aus Elementen.

(a5) Teilaufgabe – Wahrscheinlichkeit berechnen:

(a) [5/5] Wir kennen nun die Anzahl der günstigen Ergebnisse für 6 Richtige und die Mächtigkeit des Grundraums. Berechnen Sie daraus die Wahrscheinlichkeit, dass alle getippten Zahlen tatsächlich als Gewinnzahlen gezogen werden.

Die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige ist gleich . Geben Sie das exakte Ergebnis als Formel ein.

(b1) Teilaufgabe – passende Verteilung auswählen:

(b) [1/3] Statt kombinatorische Modelle zu verwenden, können die Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Lotto 6aus49 auch mit einem geeigneten diskreten Wahrscheinlichkeitsmaß berechnet werden. Welches dieser diskreten Wahrscheinlichkeitsmaße beschreibt die Verteilung der richtig getippten Zahlen unter den tatsächlich gezogenen Gewinnzahlen?

(b2) Teilaufgabe – Parameter der Verteilung bestimmen:

(b) [2/3] Eine hypergeometrische Verteilung hat drei Parameter: die Anzahl N der Kugeln, aus denen gezogen wird, die Anzahl K an Kugeln der ersten Sorte und die Anzahl n der Versuchswiederholungen. Welche Werte haben diese Parameter bei der Ziehung der Gewinnzahlen im Lotto 6aus49?

(1) Es gibt insgesamt $N =$ Kugeln.

(2) Von diesen Kugeln gehören $K =$ zu den getippten Zahlen.

(3) Es wird $n =$ mal eine Kugel gezogen.

(b3) Teilaufgabe – Wahrscheinlichkeiten berechnen:

(b) [3/3] Berechnen Sie mithilfe der hypergeometrischen Verteilung die folgenden Wahrscheinlichkeiten. *Geben Sie die exakten Ergebnisse als Formel ein.*

(1) Die Wahrscheinlichkeit, dass genau **2** der getippten Zahlen, egal bei welcher Superzahl, gezogen werden, ist .

(2) Die Wahrscheinlichkeit, dass genau **2** der getippten Zahlen, aber nicht die persönliche Superzahl gezogen werden, ist .

(3) Die Wahrscheinlichkeit, dass genau **2** der getippten Zahlen zusammen mit der persönlichen Superzahl gezogen werden, ist .

(4) Die Wahrscheinlichkeit, dass mit einer Spielreihe überhaupt kein Gewinn erzielt wird, ist .

(c1) Teilaufgabe – Anzahl der Spielreihen berechnen:

(c) [1/3] Bei einem Lotto-Vollsystem werden viele verschiedene Spielreihen gleichzeitig gespielt. Wie viele verschiedene Spielreihen bestehend aus sechs Zahlen können bei einem Lotto-Vollsystem mit **10** angekreuzten Zahlen gebildet werden?

Die Anzahl der Spielreihen ist .

(c2) Teilaufgabe – Gewinnwahrscheinlichkeit berechnen:

(c) [2/3] Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden bei einem Lotto-Vollsystem mit **10** angekreuzten Zahlen genau **4** Gewinnzahlen richtig getippt?

Die Wahrscheinlichkeit ist . *Geben Sie das exakte Ergebnis als Formel ein.*

(c3) Teilaufgabe – Verlustwahrscheinlichkeit berechnen:

(c) [3/3] Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei einem Lotto-Vollsystem mit **10** angekreuzten Zahlen überhaupt kein Gewinn erzielt?

Die Wahrscheinlichkeit ist . *Geben Sie das exakte Ergebnis als Formel ein.*