Handreichung zur Aufgabe „Koffer und Eulen“

Titel der Aufgabe:	Koffer und Eulen
Screenshot der anfänglichen Aufgabe:	Im Zauber-Express müssen kurz vor Abfahrt noch 16 Koffer und 3 Eulenkäfige verstaut werden. Ins erste Abteil passen noch 5 Gepäckstücke, ins zweite und dritte Abteil noch jeweils 4 und ins vierte und fünfte Abteil noch jeweils 3. Einzelne Gepäckstücke werden als unterscheidbar angenommen.  Wie viele Möglichkeiten gibt es, alle Gepäckstücke auf die Abteile zu verteilen? Antwort: Es gibt ______ Möglichkeiten.
Autor:	Jonas Lache, Ruhr-Universität Bochum
Lizenz:	CC BY-SA 4.0
Zielgruppe:	Studierende der Mathematik und in Serviceveranstaltungen
Thema:	Kombinatorik
Tags:	Stochastik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Kombinatorik, Urnenmodelle
Randomisierung:	nein
Aufgabentyp:	tutorielle Aufgabe[1]
Beschreibung:	In der Aufgabe sollen die Studierenden ein kombinatorisches Problem lösen. Dabei geht es um die Anzahl an Möglichkeiten, Gepäckstücke auf Zugabteile mit unterschiedlich vielen freien Plätzen zu verteilen. Beantworten die Studierenden diese Aufgabe falsch, wird sie in mehrere Teilaufgaben unterteilt. Dort geht es zumeist um das Angeben von Teilergebnissen, aber auch geschlossene Aufgaben (z. B. Auswählen von Formeln) sind dabei. Die erste Zwischenschrittsaufgabe, in der es um die Anzahl der Möglichkeiten für das erste Abteil geht, wird noch einmal in Zwischenschrittsaufgaben unterteilt.
Didaktische Überlegungen:	Das zu lösende kombinatorische Problem ist recht komplex. Daher enthält die Aufgabe Zwischenschritte und Hilfestellungen, die den Studierenden beim Problemlösen helfen sollen. Die Motivation der Lernenden soll dabei aufrecht erhalten sowie ihr Kompetenzerleben gefördert werden.
Enthaltene Fremdmaterialien:	Diese Aufgabe bindet das Skript `stackselbstlern.js` von Michael Kallweit für die Aufgabennavigation ein.
Daten oder Links (evtl. aktualisieren):	keine

[1] Eine *tutorielle Aufgabe* ist eine digitale Aufgabe, die im Falle einer fehlerhaften Antwort in kleinere und einfachere Teilaufgaben unterteilt wird. Nach der Bearbeitung dieser Teilaufgaben werden die Lernenden zur erneuten Bearbeitung der ursprünglichen Aufgabe aufgefordert.

Screenshots aus der Aufgabe

Aufgabe – Anzahl der Möglichkeiten angeben:

Im Zauber-Express müssen kurz vor Abfahrt noch 16 Koffer und 3 Eulenkäfige verstaut werden.

Ins erste Abteil passen noch 5 Gepäckstücke, ins zweite und dritte Abteil noch jeweils 4 und ins vierte und fünfte Abteil noch jeweils 3. Einzelne Gepäckstücke werden als unterscheidbar angenommen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, alle Gepäckstücke auf die Abteile zu verteilen?

Antwort: Es gibt [ ] Möglichkeiten.

i.) Zwischenschritt – Möglichkeiten erstes Abteil:

Zwischenschritt 1: Die Idee ist nun anzunehmen, dass man mit dem Einräumen der Gepäckstücke im ersten Abteil beginnt und dann mit dem zweiten, dem dritten usw. fortfährt. Dann berechnet man für jedes der fünf Abteile die Anzahl an Möglichkeiten, dieses mit den jeweils verbleibenden Gepäckstücken aufzufüllen.

Die Anzahl der Möglichkeiten für das i-te Abteil bezeichnen wir ab jetzt mit n_i.

Bestimmen Sie zunächst n_1, also die Anzahl der Möglichkeiten, das erste Abteil mit Gepäckstücken aufzufüllen.

Antwort: $n_1 =$ [ ]

1. Weiterer Zwischenschritt – Passendes Urnenmodell auswählen:

Zwischenschritt 1.1: Es hilft, den Sachverhalt auf ein Urnenmodell zu übertragen.

Welchem Urnenmodell entspricht es, wenn wir aus den 19 Gepäckstücken die Koffer auswählen, die im ersten Abteil mit den 5 freien Plätze untergebracht werden?

Antwort: Der Sachverhalt entspricht dem Ziehen von [ ] Kugeln aus einer Urne mit [ ] Kugeln (Nicht beantwortet) Zurücklegen und (Nicht beantwortet) Beachtung der Reihenfolge.

2. Weiterer Zwischenschritt – Passende Formel auswählen:

Zwischenschritt 1.2: Wie Sie es soeben richtig angegeben haben, entspricht die Situation, dass die freien Plätze im ersten Abteil mit den Gepäckstücken aufgefüllt werden, einem Urnenmodell, bei dem Kugeln aus einer Urne gezogen werden (ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen).

Mit welcher Formel kann die Anzahl der Möglichkeiten dieser Ziehung berechnet werden?

Antwort:

- ○ $\frac{n!}{(n-k)!}$
- ○ $\binom{n}{k}$
- ○ n^k
- ○ $\binom{n+k-1}{k}$

3. Weiterer Zwischenschritt – Zahlenwerte einsetzen:

Zwischenschritt 1.3: Nun haben Sie die Formel für dieses Problem ausgewählt und sich richtigerweise für den Binimialkoeffizient $\binom{n}{k}$ entschieden.

Bitte setzen Sie die korrekten Zahlen ein, damit Sie auf die Anzahl der Möglichkeiten kommen, die 5 freien Plätze im ersten Abteil mit den 19 Gepäckstücken aufzufüllen.

Antwort: Es gibt $\binom{n}{k} =$

$\binom{\square}{\square}$ Möglichkeiten.

ii.) Zwischenschritt – Möglichkeiten zweites Abteil:

Zwischenschritt 2: Berechnen Sie nun n_2, also die Anzahl der Möglichkeiten, das *zweite* Abteil mit den verbleibenden Gepäckstücken aufzufüllen. Beachten Sie, dass bereits Gepäckstücke im ersten Abteil verstaut wurden.

Antwort: $n_2 =$ [ ]

iii.) Zwischenschritt – Möglichkeiten drittes bis fünftes Abteil:

Zwischenschritt 3: Berechnen Sie nun noch n_3, n_4 und n_5.

Antwort:

$n_3 =$

$n_4 =$

$n_5 =$

iv.) Zwischenschritt – Formel für die Berechnung der Möglichkeiten insgesamt:

Zwischenschritt 4: Es ist weiterhin bekannt, wie viele Möglichkeiten es für jedes der fünf Abteile gibt, das jeweilge Abteil mit den jeweils verbliebenen Gepäckstücken aufzufüllen. Die Ergebnisse haben Sie wie folgt ausgerechnet: $n_1 = \binom{19}{5} = 11628$, $n_2 = \binom{14}{4} = 1001$, $n_3 = \binom{10}{4} = 210$, $n_4 = \binom{6}{3} = 20$ und $n_5 = \binom{3}{3} = 1$.

Was muss gerechnet werden, um die Gesamtzahl aller Möglichkeiten zu erhalten, die 19 Gepäckstücke auf die fünf Abteile aufzuteilen?

Antwort:

- ○ $n_1 + n_2 + \cdots + n_5$
- ○ $\frac{n_1+n_2+\cdots+n_5}{5}$
- ○ $n_1 \cdot n_2 \cdots n_5$
- ○ $1 - \frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdots n_5}$
- ○ $\binom{n_1 \cdot n_2 \cdots n_5}{5}$