Handreichungen zur Aufgabe „Kartenspiel“

Titel der Aufgabe:	Kartenspiel
Autoren:	Riko Kelter, Universität Siegen
Lizenz:	CC BY-SA 4.0
Zielgruppe:	Studierende der Mathematik und von Serviceveranstaltungen
Thema:	Kombinatorik
Tags:	Stochastik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Kombinatorik, Urnenmodelle, Laplace-Experimente
Randomisierung:	ja
Aufgabentyp:	tutorielle Aufgabe[1]
Beschreibung:	In der Aufgabe sollen die Studierenden ein kombinatorisches Problem lösen, welches auf der Aufteilung eines Kartenspiels in zwei gleich grosse Stapel basiert.
Didaktische Überlegungen:	Das Geburtstagsproblem ist nicht trivial, aber mit einfachen Mitteln zu lösen, wenn einmal ein Ansatz gefunden ist. Die Aufgabe enthält Zwischensicherungen und Hilfestellungen, unter anderem die Zwischenschritte. Diese sollen den Studierenden dabei helfen, die Werkzeuge für das Lösen der Aufgabe zu finden und für die Lösung des Problems anzuwenden. Die Motivation der Lernenden soll zudem aufrecht erhalten sowie ihr Kompetenzerleben gefördert werden.
Enthaltene Fremdmaterialien:	Diese Aufgabe bindet das Skript `stackselbstlern.js` von Michael Kallweit für die Aufgabennavigation ein.
Daten oder Links (evtl. aktualisieren):	keine
Screenshot der anfänglichen Aufgabe:	Wir stellen uns vor, dass n Personen in einem Raum sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben? Bitte geben Sie Ihre Antwort in das Feld ein und klicken dann auf den Button "Prüfen". Antwort: Die Wahrscheinlichkeit beträgt *Hinweis: Wir gehen davon aus, dass ein Jahr 365 Tage hat, das heißt den 29. Februar beachten wir nicht.*

[1] Eine *tutorielle Aufgabe* ist eine digitale Aufgabe, bei der die eigentlich zu lösende Aufgabe in kleinere und einfachere Teilaufgaben unterteilt wird. Die Lernenden werden dann zur Bearbeitung dieser Teilaufgaben aufgefordert, wenn sie die eigentliche Aufgabe nicht lösen können. Die Zwischenschritte sind als Hilfestellung gedacht, die den Lernenden aber nicht nur präsentiert werden, sondern mit denen sich die Lernenden aktiv auseinandersetzen müssen.

Screenshots aus der Aufgabe

1. Aufgabenstellung – Wahrscheinlichkeit angeben:

Wir stellen uns vor, dass n Personen in einem Raum sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben? Bitte geben Sie Ihre Antwort in das Feld ein und klicken dann auf den Button "Prüfen".

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit beträgt

Hinweis: Wir gehen davon aus, dass ein Jahr 365 Tage hat, das heißt den 29. Februar beachten wir nicht.

i.) Zwischenschritt – Urnenmodell wählen:

Im Folgenden wird angenommen, dass die Geburtstage von n Personen Realisierungen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Werten in der 365-elementigen Menge {1. Januar, 2. Januar, ..., 31. Dezember} sind. (Der 29. Februar wird dabei vernachlässigt)

Im Urnenmodell entspricht diese Annahme ...

... einer Ziehung von n Kugeln mit Zurücklegen aus einer Urne, die 365 Kugeln mit der Beschriftu

Durch welche der folgenden formalen Darstellungen von Urnenmodellen lässt sich der zugehörige Ergebnisraum beschreiben?

{(ω1,...,ωn) : 1≤ωi≤365}

ii.) Zwischenschritt – Gegenereignis angeben:

In diesem Schritt geht es um Ereignisse und Gegenereignisse.

Das Eriegnis, dass von den n Personen in einem Raum mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben, nennen wir ab jetzt A.

Wie lässt sich das Gegenereignis zu A beschreiben?
Antwort: $A^C =$

Alle Personen haben an unterschiedlichen Tagen Geburtstag.

Wie lässt sich A^C als Menge notieren?

Antwort: $A^C =$ {(ω1,...,ωn) : 1≤ωi≤365, ωi≠ωj falls i≠j}

iii.) Zwischenschritt – Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses:

Im vorherigen Schritt haben Sie sich überlegt, was das Gegenereignis von A (also dem Ereignis, dass von den n Personen in einem Raum mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben) ist.

Die Idee ist, dass man die Wahrscheinlichkeit von A bestimmen kann, wenn man die Wahrscheinlichkeit von A^C kennt.

Es sei Ω ein Ergebnisraum, $A \subset \Omega$ ein Ereignis und A^C das entsprechende Gegenereignis. Welche der folgenden Ausdrücke stimmen mit $P(A^C)$ überein?

- [ ] $(P(A))^C$
- [ ] $P(\Omega \setminus A)$
- [ ] $1 - P(A)$
- [ ] $P(A)^{-1}$

iv.) Zwischenschritt – Aussagen zu Laplace-Experimenten:

In diesem Schritt geht es um Laplace-Experimente. Welche der folgenden Aussagen zu Laplace-Experimenten sind richtig?

- [ ] Es sei Ω ein endlicher Ergebnisraum. Die Laplace-Verteilung auf Ω ist definiert durch

$$P(A) = \frac{1}{|\Omega|}$$

für ein Ereignis $A \subset \Omega$.

- [ ] Laplace-Experimente sind Zufallsexperimente mit endlich vielen, gleich wahrscheinlichen Ergebnissen.

- [ ] Die Laplace-Verteilung hat die Eigenschaft

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

für disjunkte Ereignisse A und B.

- [ ] Es sei Ω ein endlicher Ergebnisraum. Die Laplace-Verteilung auf Ω ist definiert durch

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

für ein Ereignis $A \subset \Omega$.

v.) Zwischenschritt – Zwischenergebnisse angeben:

Dies hier ist der letzte Schritt, der nötig ist, um die ursprüngliche Frage beantworten zu können. Denken Sie an verschiedene (Urnen-)Modelle der Kombinatorik und überlegen Sie:

Wie groß ist die Anzahl *aller* möglichen Geburtstagskombinationen in einer Gruppe von n Personen (wenn die Reihenfolge berücksichtigt wird)?

Antwort: ________

Wie groß ist die Anzahl aller Geburtstagskombinationen, in denen alle Personen *an unterschiedlichen Tagen* Geburtstag haben, in einer Gruppe von n Personen (wenn die Reihenfolge berücksichtigt wird)?

____

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von n Personen alle *an unterschiedlichen Tagen* Geburtstag haben?

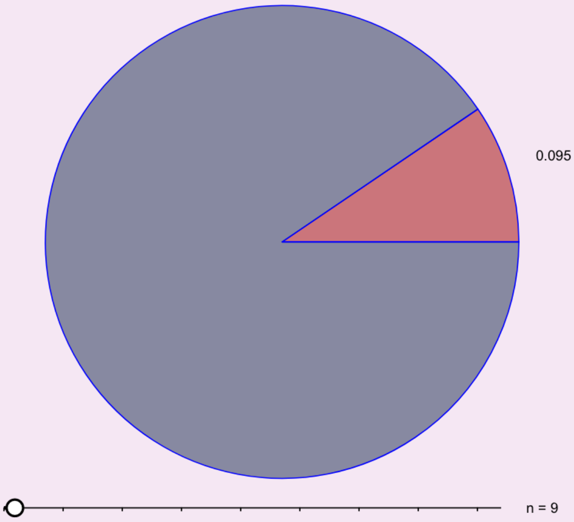
____

Interaktive Anwendung im Feedback:

Was Sie aus diesem Beispiel mitnehmen können:

Das mathematische Problem, um das es in dieser Aufgabe ging, heißt "Geburtstagsproblem" oder auch "Geburtstagsparadoxon". Es ist ein Beispiel dafür, dass wir Wahrscheinlichkeiten im Alltag oft falsch einschätzen.

Klarer wird das, wenn wir die Wahrscheinlichkeit $p(n)$, also dass von n Personen in einem Raum mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben, mal für konkrete Werte von n betrachten. Dazu können Sie die folgende **interaktive Anwendung** verwenden. Mit dem Verändern des Schiebereglers können Sie den Wert von n variieren und bekommen dann die entsprechende Wahrscheinlichkeit $p(n)$ angezeigt.



Sie sehen, dass $p(n)$ für relativ kleine n ziemlich klein ist, aber schnell wächst. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit bereits für $n = 23$ größer als 50 Prozent. In einer Schulklasse mit 30 Schüler:innen liegt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben, sogar bei über 70 Prozent. Hätten Sie das gedacht?

Überprüfen Sie doch mal, ab welchem n die Wahrscheinlichkeit bei über 99 Prozent liegt.