

Handreichung zur Aufgabe „Geburtstagsproblem“

Titel der Aufgabe: Geburtstagsproblem

Screenshot der anfänglichen Aufgabe:

Wir stellen uns vor, dass n Personen in einem Raum sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben? Bitte geben Sie Ihre Antwort in das Feld ein und klicken dann auf den Button "Prüfen".

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit beträgt

Hinweis: Wir gehen davon aus, dass ein Jahr 365 Tage hat, das heißt den 29. Februar beachten wir nicht.

Autoren: [Jonas Lache](#) und [Herold Dehling](#), Ruhr-Universität Bochum

Lizenz: [CC BY-SA 4.0](#)

Zielgruppe: Studierende der Mathematik und in Serviceveranstaltungen

Thema: Kombinatorik

Tags: Stochastik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Kombinatorik, Urnenmodelle, Laplace-Experimente

Randomisierung: nein


Aufgabentyp: tutorielle Aufgabe¹

Beschreibung: In der Aufgabe sollen die Studierenden das sogenannte Geburtstagsproblem lösen, d. h. die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass von n Personen in einem Raum mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben. Beantworten die Studierenden diese Aufgabe falsch, wird sie in mehrere Teilaufgaben unterteilt. Darunter befinden sich zahlreiche Single- und Multiple-Choice-Aufgaben zu Laplace-Experimenten und der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses sowie Aufgaben, bei denen Teilergebnisse angegeben werden sollen. Wurde die ursprüngliche Aufgabe richtig gelöst, können die Studierenden mit einer interaktiven Anwendung erkunden, wie sich die Wahrscheinlichkeit ändert, wenn n verändert wird.

Didaktische Überlegungen: Das Geburtstagsproblem ist nicht trivial, aber mit einfachen Mitteln zu lösen, wenn einmal ein Ansatz gefunden ist. Die Aufgabe enthält Zwischenschritte und Hilfestellungen. Diese sollen die Studierenden beim Lösen des Problems helfen. Die Motivation der Lernenden soll dabei aufrecht erhalten sowie ihr Kompetenzerleben gefördert werden.

Enthaltene Fremdmaterialien: Diese Aufgabe bindet das Skript `stackselbstlern.js` von Michael Kallweit für die Aufgabennavigation ein.

Daten oder Links (evtl. aktualisieren): keine

Lizenz: „Handreichung zur Aufgabe ‚Geburtstagsproblem‘“ wurde entwickelt von [Jonas Lache](#) an der Ruhr-Universität Bochum. Dieses Werk ist lizenziert unter der Lizenz „Creative Commons Namensnennung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>. 

¹Eine *tutorielle Aufgabe* ist eine digitale Aufgabe, die im Falle einer fehlerhaften Antwort in kleinere und einfachere Teilaufgaben unterteilt wird. Nach der Bearbeitung dieser Teilaufgaben werden die Lernenden zur erneuten Bearbeitung der ursprünglichen Aufgabe aufgefordert.

Screenshots aus der Aufgabe

Aufgabe – Wahrscheinlichkeit angeben:

Wir stellen uns vor, dass n Personen in einem Raum sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben? Bitte geben Sie Ihre Antwort in das Feld ein und klicken dann auf den Button "Prüfen".

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit beträgt

Hinweis: Wir gehen davon aus, dass ein Jahr 365 Tage hat, das heißt den 29. Februar beachten wir nicht.

i.) Zwischenschritt – Urnenmodell wählen:

Zwischenschritt 1: Im Folgenden wird angenommen, dass die Geburtstage von n Personen Realisierungen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Werten in der 365-elementigen Menge {1. Januar, 2. Januar, ..., 31. Dezember} sind. Der 29. Februar wird dabei vernachlässigt.

Im Urnenmodell entspricht diese Annahme ...

... einer Ziehung von n Kugeln mit Zurücklegen aus einer Urne, die 365 Kugeln mit der Beschr

Durch welche der folgenden formalen Darstellungen von Urnenmodellen lässt sich der zugehörige Ergebnisraum beschreiben?

ii.) Zwischenschritt – Gegenereignis angeben:

Zwischenschritt 2: In diesem Schritt geht es um Ereignisse und Gegenereignisse.

Das Ereignis, dass von den n Personen in einem Raum mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben, nennen wir ab jetzt A .

Wie lässt sich das Gegenereignis zu A beschreiben?

Antwort: $A^C =$

Wie lässt sich A^C als Menge notieren?

Antwort: $A^C =$

iii.) Zwischenschritt – Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses:

Zwischenschritt 3: Im vorherigen Schritt haben Sie sich überlegt, was das Gegenereignis von A (also dem Ereignis, dass von den n Personen in einem Raum mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben) ist.

Die Idee ist, dass man die Wahrscheinlichkeit von A bestimmen kann, wenn man die Wahrscheinlichkeit von A^C kennt.

Es sei Ω ein Ergebnisraum, $A \subset \Omega$ ein Ereignis und A^C das entsprechende Gegenereignis. Welche der folgenden Ausdrücke stimmen mit $P(A^C)$ überein?

- $P(A)^{-1}$
- $1 - P(A)$
- $(P(A))^C$
- $P(\Omega \setminus A)$

iv.) Zwischenschritt – Aussagen zu Laplace-Experimenten:

Zwischenschritt 4: In diesem Schritt geht es um Laplace-Experimente. Welche der folgenden Aussagen zu Laplace-Experimenten sind richtig?

- Es sei Ω ein endlicher Ergebnisraum. Die Laplace-Verteilung auf Ω ist definiert durch

$$P(A) = \frac{1}{|\Omega|}$$

für ein Ereignis $A \subset \Omega$.

- Die Laplace-Verteilung hat die Eigenschaft

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

für disjunkte Ereignisse A und B .

- Es sei Ω ein endlicher Ergebnisraum. Die Laplace-Verteilung auf Ω ist definiert durch

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

für ein Ereignis $A \subset \Omega$.

- Laplace-Experimente sind Zufallsexperimente mit endlich vielen, gleich wahrscheinlichen Ergebnissen.

v.) Zwischenschritt – Zwischenergebnisse angeben:

Zwischenschritt 5: Dies hier ist der letzte Schritt, der nötig ist, um die ursprüngliche Frage beantworten zu können. Denken Sie an verschiedene (Urnen-)Modelle der Kombinatorik und überlegen Sie:

(i) Wie groß ist die Anzahl *aller* möglichen Geburtstagskombinationen in einer Gruppe von n Personen (wenn die Reihenfolge berücksichtigt wird)?

Antwort:

(ii) Wie groß ist die Anzahl aller Geburtstagskombinationen, in denen alle Personen *an unterschiedlichen Tagen* Geburtstag haben, in einer Gruppe von n Personen (wenn die Reihenfolge berücksichtigt wird)?

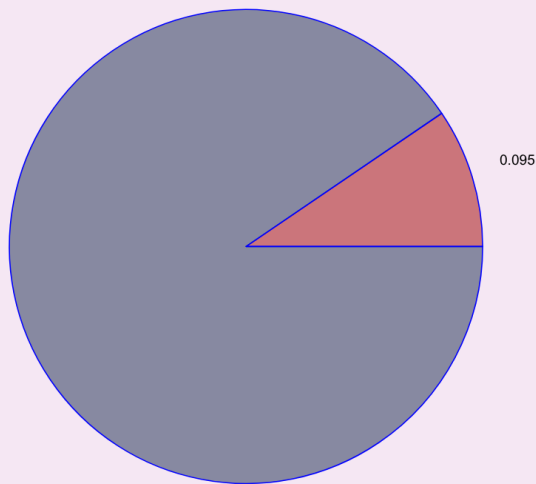
(iii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von n Personen alle *an unterschiedlichen Tagen* Geburtstag haben?

Interaktive Anwendung im Feedback der ursprünglichen Aufgabe:

Was Sie aus diesem Beispiel mitnehmen können:

Das mathematische Problem, um das es in dieser Aufgabe ging, heißt "Geburtstagsproblem" oder auch "Geburtstagsparadoxon". Es ist ein Beispiel dafür, dass wir Wahrscheinlichkeiten im Alltag oft falsch einschätzen.

Klarer wird das, wenn wir die Wahrscheinlichkeit $p(n)$, also dass von n Personen in einem Raum mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben, mal für konkrete Werte von n betrachten. Dazu können Sie die folgende **interaktive Anwendung** verwenden. Mit dem Verändern des Schiebereglers können Sie den Wert von n variieren und bekommen dann die entsprechende Wahrscheinlichkeit $p(n)$ angezeigt.



Sie sehen, dass $p(n)$ für relativ kleine n ziemlich klein ist, aber schnell wächst. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit bereits für $n = 23$ größer als 50 Prozent. In einer Schulklasse mit 30 Schüler:innen liegt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben, sogar bei über 70 Prozent. Hätten Sie das gedacht?

Überprüfen Sie doch mal, ab welchem n die Wahrscheinlichkeit bei über 99 Prozent liegt.