

Anwesenheitsübungen zur Analysis II

Blatt 1

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die Funktionenfolge $\{f_n: I \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(a) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ für $x \in I := \mathbb{R}$ (Hinweis: $\lim_{y \rightarrow \infty} ye^{-y} = 0$.)

(b) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ für $x \in I := (-\infty, -2]$

(c) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ für $x \in I := [\frac{1}{2}, 1]$

(d) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ für $x \in I := [0, 1]$

Aufgabe 2 Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen auf I jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k(1-x)$ für $x \in I := (-1, 1]$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ für $x \in I := \mathbb{R}$

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die Funktionenfolge $\{f_n: I \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(a) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

für $x \in I := \mathbb{R}$

(b) $f_n(x) = \begin{cases} \min\{n, \frac{1}{x}\}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

für $x \in I := [0, 1]$

(c) $f_n(x) = \begin{cases} \min\{nx, 1\}, & x \geq 1 \\ \max\{nx, -1\}, & x < 0 \end{cases}$

für $x \in I := \mathbb{R}$

(d) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ für $x \in I := (0, 1)$

(e) Untersuchen Sie die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nx}$ auf

(i) $(0, 1]$ und

(ii) $(\alpha, 1)$ mit $\alpha \in (0, 1)$

jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.