Übungen zur Analysis II

Blatt 1

Aufgabe 1 Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert vermöge

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\,.$$

Zeigen Sie, daß $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und daß die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine nicht überall differenzierbare Funktion konvergiert.

Aufgabe 2 Sei $\{f_n \colon I \to \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ eine Funktionenfolge auf einer Menge $I \subset \mathbb{R}$ und $f \colon I \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion.

(a) Angenommen $I = I_1 \cup I_2$ für zwei Teilmengen $I_1, I_2 \subset I$, $f_n|_{I_1}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f|_{I_1}$ für $n \to \infty$ und $f_n|_{I_2}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f|_{I_2}$ für $n \to \infty$.

Zeigen Sie, dass dann auch f_n gleichmäßig gegen f konvergiert für $n \to \infty$.

(b) Zeigen Sie, dass sich Teil (a) im Allgemeinen nicht auf unendliche Vereinigungen $I = \cup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ verallgemeinern lässt.

Aufgabe 3

(a) Die Funktionenfolge $\{f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n\geq 1}$ sei definiert vermöge

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & ,\ \text{für } 0 \leq x < 1/n \\ 2 - nx & ,\ \text{für } 1/n \leq x < 2/n \\ 0 & ,\ \text{sonst}\ . \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Funktion f_n und untersuchen Sie die Folge (f_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(b) Sei $\{a_n\}_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen und sei die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut konvergent. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x) := \sum_{n=1}^\infty a_n \sin(nx)\,.$$

Zeigen Sie: Ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty n a_n$$

absolut konvergent, so ist f stetig differenzierbar.

Zusatz: Finden Sie Bedingungen an die a_n's, damit $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gilt.

Abgabe bis 16 Uhr Dienstag, 18. Oktober 2023 auf der Moodle-Seite.