Übungsblatt 7

Aufgabe 1.

(1) Schreiben Sie folgende zahlen in algebraischer Form:

(a) $(2-i)(3+8i)$

(b) $(1-i)\overline{(1+i)}$

(c) $i(1-3i)^2$

(d) $\frac{(3+5i)^2}{1-2i}$.

(2) Schreiben Sie folgende zahlen in Exponentialform:

(a) $9i$

(b) $\frac{-i\sqrt{2}}{1+i}$

(c) $\sin(\varphi)+i\cos(\varphi)$.

Aufgabe 2. Lösen Sie folgende Gleichungen in $\mathbb{C}$:

(1) $(4-2i)z^2=(1+5i)z$

(2) $2z+i=\overline{z}+1$.

Aufgabe 3. Eine komplexe Zahl der Form $z=a+ib$ mit $a,b\in\mathbb{Z}$ heißt **Gaußsche Zahl**, und man schreibt $\mathbb{Z}[i]$ für die Menge aller gaußschen Zahlen.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ unter Subtraktion und Multiplikation abgeschlossen ist.

(2) Für alle $z\in\mathbb{C}$, sei $N(z)=z\overline{z}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $z,z'\in\mathbb{C}$ gilt $N(zz')=N(z)N(z')$.
(b) Zeigen Sie: ist $z\in\mathbb{Z}[i]$, dann ist $N(z)\in\mathbb{N}$.
(c) Zeigen Sie: ist $z\in\mathbb{Z}[i]$ so, dass $z^{-1}\in\mathbb{Z}[i]$, dann ist $N(z)=1$.
(d) Bestimmen Sie alle gaußsche Zahlen z, so dass $z^{-1}\in\mathbb{Z}[i]$ ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass der $\mathbb{R}^2$ ein Vektorraum ist mit der Addition

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

und skalarer Multiplikation

$$\alpha(v_1, v_2) = (\alpha v_1, \alpha v_2),$$

wobei $v, w \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5. Addieren Sie folgende Vektoren und visualisieren Sie jeweils in der Ebene:

a) $v_1 = (3, 4)$, $v_2 = (-1, -2)$

b) $v_1 = (-1, 1)$, $v_2 = (2, 1)$, $v_3 = (-1, -2)$