Vorkus

Mathematik & Physik

zum Wintersemester 2024/25

Nils Heerten Christian Lehn Ercan Sönmez

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 *Es sei $f : A \to B$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen A und B.*

1. *Zeigen Sie, dass die Existenz einer Rechtsinversen von f äquivalent dazu ist, dass f surjektiv ist.*
2. *Zeigen Sie, dass die Existenz einer Linksinversen von f äquivalent dazu ist, dass f injektiv ist.*

Erinnerung: Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt Rechtsinverse von f, wenn $f \circ g = id_B$ gilt. Analog heißt eine Abbildung $h : B \to A$ Linksinverse von f, wenn $h \circ f = id_A$ gilt.

Für die nächste Aufgabe erinnern wir an den folgenden Satz aus der Vorlesung (in leicht geänderter, jedoch äquivalenter Formulierung).

Satz 1 *Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dann existieren paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_k$ und natürliche Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ so, dass*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}. \tag{1}$$

Diese Zerlegung ist bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

Aufgabe 2 *Vervollständigen Sie den Beweis aus der Vorlesung. Zur Erinnerung: Die Existenz einer Primfaktorzerlegung wurde gezeigt, die Eindeutigkeit steht noch aus. Für diese Aufgabe bezeichnen wir die Zahl k aus Formel (1) als Länge der Zerlegung. Sie können wie folgt vorgehen: Nehmen Sie an, es seien zwei Zerlegungen der Längen k bzw. k' gegeben. Zeigen Sie die Aussage durch vollständige Induktion über das Minimum $\min(k, k')$ der Längen.*

Aufgabe 3 *Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Finden Sie eine maximale Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ so, dass die Einschränkung von f auf U injektiv ist. Wir werden diese Einschränkung der Einfachheit halber wieder mit f bezeichnen. Berechnen Sie die Umkehrfunktion der Einschränkung $f : U \to f(U)$.

Aufgabe 4 *Führen Sie die allgemeine kubische Gleichung der Form*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

durch kubische Ergänzung auf eine Gleichung ohne quadratischen Term, also eine Gleichung der Form

$$y^3 + \alpha y + \beta = 0$$

zurück. Hierbei ist $y = x + \lambda$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$ zu wählen. Wie hängen die Koeffizienten α, β von den Koeffizienten a, b, c ab?