# Übungsblatt 6

**Aufgabe 1.** Sei $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci-Folge, d.h.

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \;\forall n \in \mathbb{N}.$$

(1) Bestimmen Sie alle reelle Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$.

(2) Sei $\alpha$ eine reelle Lösung der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\alpha^{n+1} = \alpha F_{n+1} + F_n.$$

(3) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^n - \Psi^n\right),$$

wobei $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\Psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sind.

**Aufgabe 2.** Bestimmen Sie folgende Grenzwerte (wenn sie existieren).

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3n^2-2n+1}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n+1}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2)}{n}$

**Aufgabe 3.** Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch:

$$u_0 = 4 \quad \text{und} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n} \;\forall n \in \mathbb{N}.$$

(1) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $1 \le u_{n+1} \le u_n$.

(2) Zeigen Sie, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

**Aufgabe 4.** Sei $a \in \mathbb{R}_+^\times$. Man definiert, für alle $x \in \mathbb{R}$, $a^x = e^{\ln(a)x}$. Zeigen Sie, dass für jede $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $a^{xy} = (a^x)^y$.