

Vorkus
Mathematik & Physik
zum Wintersemester 2024/25

Nils Heerten

Christian Lehn

Ercan Sönmez

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 a) Berechnen Sie für $a = 1 + 3i$, $b = 8 - 4i$, $c = 3 + 2i$ und $d = 7 - 4i$:

i. $a + b$

ii. $b + c + d$

iii. $a \cdot b$

iv. $(a + c) \cdot b$

v. a/b

b) Für $a = -2i$ und $b = 1 + i$ geben Sie an bzw. berechnen Sie

i. $\Re(a)$, $\Im(a)$ und $\Re(b)$, $\Im(b)$

ii. $\varphi := \arg(a)$ und $\psi := \arg(b)$

iii. $r_a := |a|$ und $r_b := |b|$

iv. Geben Sie die Punkte in der Form (r_a, φ) bzw. (r_b, ψ) an. Was bedeutet diese Abkürzung ausgeschrieben?

Aufgabe 2 a) Sind folgende Abbildungen injektiv, surjektiv, oder bijektiv?

i. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\text{ii. } g &: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases} \\
\text{iii. } h &: \begin{cases} [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases} \\
\text{iv. } \text{Id} &: \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \mapsto x \end{cases} \\
\text{v. } k &: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \exp(x) \end{cases}
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie folgende Urbilder:

$$\begin{aligned}
\text{i. } &g^{-1}(5) \\
\text{ii. } &h^{-1}(1) \\
\text{iii. } &f^{-1}([1, 2]) \\
\text{iv. } &f^{-1}([-1, 1]) \\
\text{v. } &k^{-1}([1, 2])
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 Beweisen Sie die folgenden Teilbarkeitskriterien.

1. Teilbarkeit durch 11: Eine natürliche Zahl $n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ mit den Ziffern a_i in Dezimaldarstellung ist genau dann durch 11 teilbar, wenn

$$q = \sum_{i=0, i \text{ gerade}}^k a_i - \sum_{i=1, i \text{ ungerade}}^k a_i$$

durch 11 teilbar ist. Die Zahl q wird auch als alternierende Quersumme bezeichnet.

2. Eine natürliche Zahl $n = a \cdot 10 + b$ mit $b \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ist genau dann durch 13 teilbar, wenn $a - 9 \cdot b$ durch 13 teilbar ist.

Formulieren und beweisen Sie ein analoges Kriterium für Teilbarkeit durch 17.

Aufgabe 4 Finden Sie alle Prizahlen zwischen 1 und 100 mithilfe des Siebs des Eratosthenes.

Hier ist die Funktionsweise des Siebs:

1. **Erzeuge eine Liste von Zahlen:** Schreibe alle Zahlen von 2 bis n (Hier $n = 100$.) auf.
2. **Streiche Vielfache der kleinsten Primzahl:** Beginne mit der kleinsten Zahl $p = 2$ und streiche alle Vielfachen von p (also $2p, 3p, 4p, \dots$) aus der Liste, da diese keine Primzahlen sein können.
3. **Wiederhole den Vorgang:** Wiederhole diesen Prozess für die nächstkleinste nicht gestrichene Zahl. Wiederhole dies so oft, bis das Ende der Liste erreicht ist.
4. **Verbleibende Zahlen:** Alle verbleibenden Zahlen in der Liste sind Primzahlen.

Aufgabe 5 Berechnen Sie die Primfaktorzerlegung der folgenden Zahlen:

10.881, 19.669, 139.601, 2.242.