

Vorkus  
**Mathematik & Physik**  
zum Wintersemester 2024/25

---

Nils Heerten

Christian Lehn

Ercan Sönmez

---

## Übungsblatt 5

**Aufgabe 1** a) Berechnen Sie für  $a = 1 + 3i$ ,  $b = 8 - 4i$ ,  $c = 3 + 2i$  und  $d = 7 - 4i$ :

i.  $a + b$

ii.  $b + c + d$

iii.  $a \cdot b$

iv.  $(a + c) \cdot b$

v.  $a/b$

b) Für  $a = -2i$  und  $b = 1 + i$  geben Sie an bzw. berechnen Sie

i.  $\Re(a)$ ,  $\Im(a)$  und  $\Re(b)$ ,  $\Im(b)$

ii.  $\varphi := \arg(a)$  und  $\psi := \arg(b)$

iii.  $r_a := |a|$  und  $r_b := |b|$

iv. Geben Sie die Punkte in der Form  $(r_a, \varphi)$  bzw.  $(r_b, \psi)$  an. Was bedeutet diese Abkürzung ausgeschrieben?

**Aufgabe 2** a) Sind folgende Abbildungen injektiv, surjektiv, oder bijektiv?

i.  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\text{ii. } g &: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases} \\
\text{iii. } h &: \begin{cases} [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases} \\
\text{iv. } \text{Id} &: \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \mapsto x \end{cases} \\
\text{v. } k &: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \exp(x) \end{cases}
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie folgende Urbilder:

$$\begin{aligned}
\text{i. } &g^{-1}(5) \\
\text{ii. } &h^{-1}(1) \\
\text{iii. } &f^{-1}([1, 2]) \\
\text{iv. } &f^{-1}([-1, 1]) \\
\text{v. } &k^{-1}([1, 2])
\end{aligned}$$

**Aufgabe 3** Beweisen Sie die folgenden Teilbarkeitskriterien.

1. Teilbarkeit durch 11: Eine natürliche Zahl  $n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$  mit den Ziffern  $a_i$  in Dezimaldarstellung ist genau dann durch 11 teilbar, wenn

$$q = \sum_{i=0, i \text{ gerade}}^k a_i - \sum_{i=1, i \text{ ungerade}}^k a_i$$

durch 11 teilbar ist. Die Zahl  $q$  wird auch als alternierende Quersumme bezeichnet.

2. Eine natürliche Zahl  $n = a \cdot 10 + b$  mit  $b \in \{0, 1, \dots, 9\}$  ist genau dann durch 13 teilbar, wenn  $a - 9 \cdot b$  durch 13 teilbar ist.

Formulieren und beweisen Sie ein analoges Kriterium für Teilbarkeit durch 17.

**Aufgabe 4** Finden Sie alle Prizahlen zwischen 1 und 100 mithilfe des Siebs des Eratosthenes.

Hier ist die Funktionsweise des Siebs:

1. **Erzeuge eine Liste von Zahlen:** Schreibe alle Zahlen von 2 bis  $n$  (Hier  $n = 100$ .) auf.
2. **Streiche Vielfache der kleinsten Primzahl:** Beginne mit der kleinsten Zahl  $p = 2$  und streiche alle Vielfachen von  $p$  (also  $2p, 3p, 4p, \dots$ ) aus der Liste, da diese keine Primzahlen sein können.
3. **Wiederhole den Vorgang:** Wiederhole diesen Prozess für die nächstkleinste nicht gestrichene Zahl. Wiederhole dies so oft, bis das Ende der Liste erreicht ist.
4. **Verbleibende Zahlen:** Alle verbleibenden Zahlen in der Liste sind Primzahlen.

**Aufgabe 5** *Berechnen Sie die Primfaktorzerlegung der folgenden Zahlen:*

10.881, 19.669, 139.601, 2.242.