
Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Finden Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssystemen:

$$(1) \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x - 2y = 4 \\ -\frac{1}{2}x + y = -2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = -2 \end{cases}$$

Aufgabe 2. Seien f, g zwei Polynomfunktionen. Zeigen Sie, dass $f \circ g$, $f + g$ und fg auch Polynomfunktionen sind, und dass gilt:

(1) $\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g)$ falls f, g nicht konstant sind.

(2) $\deg(f + g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$

(3) $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.

Aufgabe 3.

(1) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x^n - \lambda^n = (x - \lambda) \sum_{i=0}^{n-1} x^i \lambda^{n-1-i}.$$

(2) Sei f eine nicht konstante Polynomfunktion. Zeigen Sie, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ genau dann eine Nullstelle von f ist, wenn eine Polynomfunktion g mit $f(x) = (x - \lambda)g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert.

Aufgabe 4. Für jede der folgenden Polynomfunktionen f, g , bestimmen Sie die Polynomfunktionen q, r mit $f = gq + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$.

(1) $f : x \mapsto 4x^2 + 3x - 1, g : x \mapsto x - 3,$

(2) $f : x \mapsto 2x^3 - x + 1, g : x \mapsto x^2 + x + 1,$

(3) $f : x \mapsto 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1, g : x \mapsto x^2 + 4.$

Aufgabe 5. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x) + \cos(\alpha x)$. Zeigen Sie, dass

$$f \text{ ist periodisch} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Q}.$$