Vorkus

Mathematik & Physik

zum Wintersemester 2024/25

Nils Heerten — Christian Lehn — Ercan Sönmez

Übungsblatt 4

Aufgabe 1

i. Geben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ der Menge $A = \{1, 2, 3, 4\}$ an.

ii. Geben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ der Menge $A = \{\xi, \eta, \psi\}$ an.

iii. Was ist $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$?

iv. Was ist $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$?

Aufgabe 2

Es sei A eine Menge mit n Elementen und $a \notin A$. Um wie viele Elemente ist $\mathcal{P}(A \cup \{a\})$ größer als $\mathcal{P}(A)$?
Versuchen Sie dies ohne das Resultat von Satz 3.18 aus der Vorlesung zu beweisen.

Aufgabe 3

Beweisen Sie die folgende Aussage per vollständiger Induktion:
Für alle $n \geq 1$ und beliebige $a, b \in \mathbb{N}_0$, gilt

$$(a + b)^n \geq a^n + b^n.$$

Aufgabe 4* – Zusatz, wenn fertig

Beweisen Sie die folgende Aussage per vollständiger Induktion:
Für alle $n \geq 1$ ist $n^5 - n$ immer durch 5 teilbar.

Hinweis: *Sie dürfen ohne Beweis den binomischen Lehrsatz*

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

(für $n \geq 2$) nutzen, wobei

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}.$$

Aufgabe 5* – Zusatz, wenn fertig

Wer schon mit allem fertig ist oder ein wenig knobeln möchte: Man kann mit der Vollständigen Induktion auf die Gültigkeit des Binomischen Lehrsatzes aus Aufgabe 4^* für alle $n \geq 2$ zeigen.

Hinweis: *Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$