Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Seien $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man $\sum_{i=1}^{n} a_i$ induktiv wie folgt:

$$\sum_{i=1}^{0} a_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \; \forall n \geq 1.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aufgabe 2. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Man definiert die n-te Potenz a^n von a induktiv wie folgt:

$$a^0 = 1 \quad \text{und} \quad a^n = a.a^{n-1} \; \forall n \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

(1) $(a.b)^n = a^n.b^n$.

(2) $a^{m+n} = a^m.a^n$,

(3) $(a^m)^n = a^{m.n}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$ gilt $2^n \geq n^2$.

Aufgabe 4 (Pferde-Paradox)**.** Für $n \in \mathbb{N}$, sei $A(n)$ die Aussage: "In jeder Herde mit n Pferden haben alle n Pferde die gleiche Farbe".

(1) Zeigen Sie, dass $A(0)$ und $A(1)$ gelten.

(2) Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie den Induktionsschritt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Offensichtlich ist aber $A(n)$ falsch für alle $n \geq 2$.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x+2| - |x-2|$ ungerade ist.

Aufgabe 6. Sei $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Für jede der folgenden Funktionen f, bestimmen Sie ob f injektiv bzw. surjektiv ist.

(1) $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x|. \end{array}$$

(2) $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x|. \end{array}$$

(3) $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x|. \end{array}$$

(4) $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x|. \end{array}$$