Dr. S. Suhr
Ruhr-Universität Bochum
September 2024

Vorkurs für angehende Studierende der Natur-, Ingenieurwissenschaften, Informatik und Angew. Informatik
Aufgabenblatt 4

Polynome, Wurzeln, Gleichungen

Aufgabe 1:

(a) Erweitern Sie die Brüche $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{12}}$, $\frac{3-2\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$ und $\frac{x}{\sqrt{x}-5}$, so dass der Nenner anschließend rational ist.

(b) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\sqrt[3]{20\sqrt{20}}$ soweit wie möglich.

Aufgabe 2:

(a) Was ist $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}$?

(b) Für welche (möglichst kleinen) Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \sqrt[m]{x^n} \quad ?$$

Aufgabe 3:

(a) Führen Sie die folgende Polynomdivision durch:

$$(4y^4 + 3y^2 + 1) : (2y^2 - y + 1)$$

(b) Berechnen Sie für das Polynom $p(x) = x^2 - 3x + 1$ das Polynom 4.Grades $q(x) = p(p(x) + x)$ und zeigen Sie, dass q ohne Rest durch p teilbar ist, indem Sie den Quotienten der beiden Polynome bestimmen.
Was bedeutet das für die Nullstellen von q?

(c) Das Polynom $P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ hat bei $x = 1$ eine Nullstelle. Wie lauten die anderen Nullstellen von P?

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie mit Hilfe von Polynomdivision

$$(x^3 + 3x^2 - 4x - 12) : (x^2 + x - 6) \;\text{ und }\; (6x^3 - x^2 - 8x - 6) : (3x^2 + 4x + 2)$$

Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe 5:
Wenn $f(x) = x + \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$, was ist dann der maximale Definitionsbereich von $f \circ g$ und der maximale Definitionsbereich von $g \circ f$?

Aufgabe 6:
Bestimmen Sie die Grenzwerte für $x \to \infty$ der Funktionen $f(x)$ mit

(a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x+2}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x+2} - \dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+x}$,

(c) $f(x) = \dfrac{1-2x^3}{3x^3-1} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

Aufgabe 7:
Bestimmen Sie die Grenzwerte der Funktionen $f(x)$ mit

(a) $f(x) = \dfrac{20x^3 - 18x - 2}{2x^2 - 2}$ für $x \to 1$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{\sqrt{x}}$ für $x \to 0$

Tipp: Erweitern Sie den Bruch mit $\sqrt{x+9} + 3$.

(c) $f(x) = x\sin(x)$ für $x \to 0$

Aufgabe 8:
Wir wollen die (schiefe) Asymptote der rationalen Funktion $f(x) = \frac{3 \cdot x^3 + x^2 + 2 \cdot x + 3}{x^2 + x + 1}$ bestimmen. Finden Sie also m und b so, dass

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - (mx + b)\right) = 0\,.$$

Aufgabe 9:
Bestimmen Sie die Grenzwerte

(a) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{2/x - 3x - x^2}{1/x + 5x - 6x^2}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2/x - 3x - x^2}{1/x + 5x - 6x^2}$ und

(c) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x - 4}{3x + 2} - \frac{2x^2 - 4x + 2}{6x - 5}$.

Vektorrechnung

Aufgabe 10:
Bestimmen Sie die Länge der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und überprüfen Sie, ob zwei dieser Vektoren senkrecht zueinander sind.

Aufgabe 11:

(a) Wenn man vom Koordinatenursprung aus zunächst 1 km nach Norden, dann 2 km nach Nordwest, dann 3 km nach Südwest und anschließend 4 km nach Südost geht, wie weit ist man dann von seinem Ausgangspunkt entfernt?

(b) Von einem Parallelogramm kennt man zwei Ecken $A = (3, 4)$ und $B = (12, 7)$. Außerdem ist der Schnittpunkt $S = (7, 10)$ der Diagonalen bekannt. Bestimmen Sie die beiden anderen Eckpunkte.

Aufgabe 12:

(a) Geben Sie einen Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ der Länge 6 an, der in die entgegengesetzte Richtung zeigt wie der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Geben Sie alle Vektoren $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ an, die die Länge 2 haben und senkrecht zum Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind.

(c) Geben Sie (ohne Benutzung des Kreuzprodukts) einen Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ der Länge 1 an, der senkrecht ist zu den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 13:
Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und M' der Mittelpunkt der Strecke $\overline{A'B'}$. Zeigen Sie, dass

$$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}\right) .$$